창의융합교육원 2024-32

2024 수학과 징검다리



부산광역시교육청창의융합교육원
Busan Institute of Creative Convergence Education

일러두기

☑ 징검다리는 중학교 수학 교육과정을 모두 마친 학생이 고등학교 진학을 앞두고 중학 과정에서 배운 수학을 스스로 익혀 고등학교 학습의 탄탄한 기초를 만들어 나가도록 수수교(수학 수업을 연구하는 교사) 수학교육 연구회에서 만들고 부산광역시교육청창의융합교육원에서 발간하였습니다.

☑ 이 교재는 중학교 수학 학습 내용과 더불어 고등학교 기본 개념을 연결하여 볼 수 있는 내용으로 구성하여, 학생이 차근차근 스스로 한 단계 씩 도전해 볼 수 있도록 하였습니다. 중학교의 모든 내용을 수업에서 전체 학생들을 대상으로 다루기에는 양이 많기에, 학교 수업에서 활용할 때는 선생님께서 필요한 부분을 선택하여 다루고, 고등학교 기본 개념 내용까지도 도전하고 싶은 학생들의 경우 스스로 단계별로 차근차근 해결하여 보면 좋겠습니다.

☑ 교재는 학습 단원 순서에 따라 다음과 같이 구성되어 있습니다.

1. **고등학교 수학 과목의 내용구조:** 고등학교에서 학습할 내용을 전반적으로 확인할 수 있도록 하였습니다.
2. **수학도움닫기:** 중학교 내용을 개념을 복습하고, 관련 문제로 충분히 중학교 내용을 마지막으로 잘 다질 수 있도록 구성하였습니다.
3. **수학멀리뛰기:** 수학 도움닫기에서 복습한 중학교 수학 내용에서 한 단계 더 나아가 고등학교 개념을 미리 맛볼 수 있도록 하여, 중학교 내용을 충분히 복습한 후 그 단원과 관련된 고등학교 수학 문제를 스스로 풀어보면서, 학생들이 성취감을 느낄 수 있도록 하였습니다.

Contents

목 차

제1부 2022 개정 수학과 교육과정(고등학교) ····· 1

제2부 중고등학교 전환기 수학 활동 자료 ····· 5

1. 다항식

1-0 중학교 개념으로 확인하기 ····· 8

1-0 중학교 문제로 다지기 ····· 18

1-1 다항식의 연산 ····· 26

1-2 항등식의 성질, 나머지 정리 ····· 39

1-3 인수, 인수분해 ····· 47

2. 방정식과 부등식

2-0 중학교 개념으로 확인하기 ····· 58

2-0 중학교 문제로 다지기 ····· 69

2-1 복소수 ····· 77

2-2 이차방정식의 판별식, 근과 계수와의 관계 ····· 89

2-3 이차방정식과 이차함수 ····· 98

2-4 여러 가지 방정식 ····· 106

2-5 일차부등식 ····· 121

2-6 이차부등식 ····· 130

3. 경우의 수

3-0 중학교 개념으로 확인하기 ····· 140

3-0 중학교 문제로 다지기 ····· 145

3-1 경우의 수 ····· 153

3-2 순열과 조합 ····· 163

Contents

4. 행렬

4-0 중학교 개념으로 확인하기 ····· 174
4-0 중학교 문제로 다지기 ····· 177
4-1 행렬과 그 연산 ····· 185

5. 도형의 방정식(1)

5-0 중학교 개념으로 확인하기 ····· 194
5-0 중학교 문제로 다지기 ····· 198
5-1 선분의 내분 ····· 206
5-2 두 직선의 평행과 수직 ····· 219
5-3 점과 직선 사이의 거리 ····· 231

6. 도형의 방정식(2)

6-0 중학교 개념으로 확인하기 ····· 242
6-0 중학교 문제로 다지기 ····· 246
6-1 원의 방정식 ····· 254
6-2 원과 직선의 위치관계 ····· 264
6-3 평행이동 ····· 277
6-4 대칭이동 ····· 286

7. 정답 ····· 295

제 1 부

2022 개정
수학과 교육과정
(고등학교)

수학미리보기 1

고등학교 수학 교과목의 계통도

중학교 수학 영역	공통 과목			
	공통수학1 (기본수학1)		공통수학2 (기본수학2)	
	핵심개념	내용요소	핵심개념	내용요소
변화와 관계	다항식	• 다항식의 연산 • 인수분해	함수와 그래프	• 함수 • 유리함수와 무리함수
	방정식과 부등식	• 이차방정식과 이차함수 • 부등식		
도형과 측정			도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동
자료와 가능성	경우의 수	• 합의 법칙과 곱의 법칙 • 순열과 조합		

일반 선택 과목					
대수		미적분 I		확률과 통계	
핵심개념	내용요소	핵심개념	내용요소	핵심개념	내용요소
지수함수와 로그함수	• 지수와 로그 • 지수함수와 로그함수	함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속	경우의 수	• 순열과 조합 • 이항정리
		미분	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용	확률	• 확률의 개념과 활용 • 조건부확률
삼각함수	• 삼각함수 • 사인법칙과 코사인법칙	적분	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용	통계	• 확률분포 • 통계적 추정

진로 선택 과목					
미적분 II		기하		경제수학	
핵심개념	내용요소	핵심개념	내용요소	핵심개념	내용요소
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수	이차곡선	• 이차곡선	수와 경제	• 수와 생활경제 • 수열과 금융
미분법	• 여러 가지 함수의 미분 • 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용	공간도형과 공간좌표	• 공간도형 • 공간좌표	함수와 경제	• 함수와 경제 현상 • 함수의 활용
적분법	• 여러 가지 함수의 적분법 • 정적분의 활용	벡터	• 벡터의 연산 • 벡터의 성분과 내적 • 도형의 방정식	미분과 경제	• 미분과 경제 현상 • 미분의 활용
				행렬과 경제	• 행렬과 경제 현상 • 행렬의 활용

진로 선택 과목			
인공지능 수학		직무 수학	
핵심개념	내용요소	핵심개념	내용요소
인공지능과 빅데이터	• 인공지능의 개념과 역사 • 빅데이터와 인공지능	수와 연산	• 수와 사칙연산 • 단위 환산
텍스트 데이터 처리	• 텍스트 데이터 표현 • 텍스트 데이터 분석	변화와 관계	• 비율과 백분율 • 규칙성과 변화 • 식과 문제해결
이미지 데이터 처리	• 이미지 데이터 표현 • 이미지 데이터 분석	도형과 측정	• 도형의 관찰과 표현 • 도형의 측정
예측과 최적화	• 경향성과 예측 • 최적화		
인공지능과 수학 탐구	• 합리적 의사 결정 • 인공지능과 수학 탐구	자료와 가능성	• 경우의 수와 가능성 • 자료의 정리와 해석

제 2 부

중고등학교 전환기 수학 활동 자료

1. 다항식
2. 방정식과 부등식
3. 경우의 수
4. 행렬
5. 도형의 방정식(1)
6. 도형의 방정식(2)

1

다항식

1-0 중학교 개념으로 확인하기
1-0 중학교 문제로 다지기
1-1 다항식의 연산
1-2 항등식의 성질, 나머지 정리
1-3 인수, 인수분해

수학 도움닫기
1-0

중학교 개념으로 확인하기

문자의 사용과 식의 계산 (중1)

1. 문자의 사용

(1) 곱셈 기호의 생략

① 수와 문자, 문자와 문자의 곱에서는 곱셈 기호 $\times$를 생략한다.

예) $5\times a=5a$, $a\times b=ab$

② 수와 문자의 곱에서는 수를 문자의 앞에 쓰고, 1 또는 -1과 문자의 곱에서는 1을 생략한다.

예) $a\times 2=2a$, $a\times 1=a$, $a\times(-1)=-a$

☞ **왜 숫자가 문자의 앞에 와야 할까요?**

$a\times 2$는 $2a$, $a2$ 어떻게 쓰건 수식의 오류가 발생하지 않지만, $a\times(-2)$는 곱셈 기호만 생략하여 $a-2$라고 쓰면 수식의 오류가 발생할 수 있으므로 숫자를 앞으로 하여 $-2a$와 같이 쓴다.

※ $a\times 0.1=0.1a$

③ 문자와 문자의 곱에서는 보통 알파벳 순서대로 쓰고, 같은 문자의 곱은 거듭제곱의 꼴로 나타낸다.

$b\times a=ab$, $a\times a=a^2$

(2) 나눗셈 기호의 생략

나눗셈 기호 $\div$를 생략하고 분수의 꼴로 나타낸다.

$a\div b=\frac{a}{b}$ (단, $b\neq 0$)

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음을 곱셈 기호 $\times$를 생략한 식으로 나타내시오.

(1) $a\times b\times(-2)\times b\times a\times a$

(2) $1\times x+y\times(0.1)$

확인2〉 다음을 나눗셈 기호 ÷를 생략한 식으로 나타내시오.

(1) $(-2)\div a$ (2) $(x+y)\div 3$

확인3〉 다음을 곱셈 기호 $\times$와 나눗셈 기호 ÷를 생략한 식으로 나타내시오.

(1) $a\div(b\times c)$ (2) $x\times 2-3\div y$

2. 식의 값

(1) 대입: 문자를 사용한 식에서 문자를 어떤 수나 식으로 바꾸어 넣는 것

(2) 식의 값: 대입하여 계산한 결과

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 $a=3$, $b=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $3a-5b$ (2) $\dfrac{a-b}{a+b}$

3. 일차식과 그 계산

(1) 용어 정리

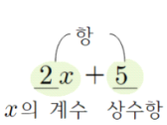
항: 수 또는 문자의 곱으로 이루어진 것 예) $2x$, 5

상수항: 수만으로 이루어진 항 예) 5

x의 계수: 문자 x에 곱한 수 예) 항 $2x$에서 2

다항식: 한 개 또는 두 개 이상의 항의 합으로 이루어진 식 예) $2x+5$, $3x$

단항식: 항이 한 개뿐인 다항식 예) $2x$, $-3x$



차수: 어떤 항에서 곱한 문자의 개수를 그 문자에 대한 항의 차수
다항식의 차수: 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수
일차식: 차수가 1인 다항식

$3x^{2}$ (차수)

(2) 일차식과 수의 곱셈, 나눗셈

① 단항식과 수의 곱셈
수끼리 곱하여 문자 앞에 쓴다.

$2a \times 3 = 6a$ (2×3)

곱셈의 교환법칙과 결합법칙 이용

$$\begin{aligned} 2a \times 3 &= 2 \times a \times 3 \\ &= 2 \times 3 \times a \\ &= (2 \times 3) \times a \\ &= 6 \times a \\ &= 6a \end{aligned}$$

② 일차식과 수의 곱셈: 분배법칙을 이용하여 일차식의 각 항에 그 수를 곱하여 계산한다.
예) $2(3x-2) = 2 \times 3x - 2 \times 2 = 6x - 4$
$(2x-5) \times 4 = 2x \times 4 - 5 \times 4 = 8x - 20$

③ 일차식을 수로 나눌 때는 수의 계산에서와 같이 나누는 수의 역수를 곱하여 계산한다.
예) $(3x-6) \div 3 = (3x-6) \times \frac{1}{3} = 3x \times \frac{1}{3} - 6 \times \frac{1}{3} = x - 2$

(3) 일차식의 덧셈, 뺄셈

① 동류항: 문자와 차수가 같은 항
예) $2x$와 $-3x$, 5와 -2

② 일차식의 덧셈은 동류항끼리 모아서 계산한다. 또 괄호가 있는 경우에는 괄호를 먼저 풀고 동류항끼리 계산한다.
예) $2x + 3x = 5x$

☞ **왜 계수끼리 더하는 걸까요?**

$2x + 3x = \underbrace{x + x}_{2\text{개}} + \underbrace{x + x + x}_{3\text{개}} = 5x$

③ 일차식의 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 덧셈으로 고쳐서 계산한다.
예) $(2x+1) - (3x-5) = (2x+1) + (-3x+5)$

$$\begin{aligned} &= 2x + 1 - 3x + 5 \\ &= 2x - 3x + 1 + 5 \\ &= -x + 6 \end{aligned}$$

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 다음 다항식에서 항과 상수항을 말하고, 각 문자의 계수를 말하시오.

(1) $3a-5$

(2) $9-4x$

확인6〉 다음 다항식의 차수를 말하고, 일차식을 모두 찾으시오.

(1) $1-5a$

(2) $8b$

(3) x^2-7

(4) $2x^2-8x+9$

확인7〉 다음을 계산하시오.

(1) $(-4a)\times 6$

(2) $18x\times\left(-\frac{2}{9}\right)$

확인8〉 다음을 계산하시오.

(1) $-3(2a+7)$

(2) $(4x-8)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$

확인9〉 다음을 계산하시오.

(1) $12a\div 42$

(2) $(8a-6)\div(-2)$

확인10〉 다음을 계산하시오.

(1) $6x+5-1-2x$

(2) $4a+6-8-3a$

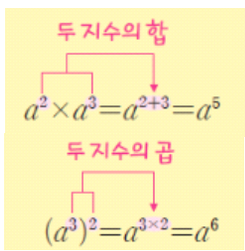
확인11〉 다음을 계산하시오.

(1) $(3x-2)-(2x-7)$

(2) $(2x+5)-3(x-1)$

식의 계산 (중2)

1. 지수법칙

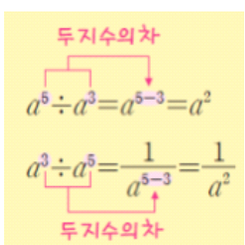


(1) 지수법칙(1)

m, n이 자연수일 때, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) 지수법칙(2)

m, n이 자연수일 때, $(a^m)^n = a^{mn}$



(3) 지수법칙(3)

$a \neq 0$이고, m, n이 자연수일 때

① $m > n$이면, $a^m \div a^n = a^{m-n}$

② $m = n$이면, $a^m \div a^n = 1$

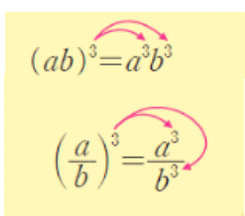
③ $m < n$이면, $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

(4) 지수법칙(4)

m이 자연수일 때,

① $(ab)^m = a^m b^m$

② $\left(\dfrac{b}{a}\right)^m = \dfrac{b^m}{a^m}$ (단, $a \neq 0$)



〈스스로 확인하기〉

확인12〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $2^2 \times 2^4 \times 2^3$ (2) $a^4 \times a^5$ (3) $x^3 \times y^8 \times x^7 \times y$

확인13〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^3)^6$ (2) $(2^3)^5 \times (2^2)^4$ (3) $(a^2)^3 \times (b^4)^3 \times a^3$

확인14〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $5^8 \div 5^4$ (2) $a^4 \div a^4$ (3) $x \div x^7$

확인15〉 다음 식을 간단히 하시오.

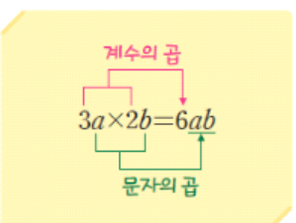
(1) $(3a)^2$ (2) $\left(-\frac{a}{2}\right)^3$ (3) $\frac{7^3}{14^3}$

2. 단항식의 계산

(1) 단항식의 곱셈: 단항식의 곱셈에서는 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 곱하여 계산한다.

교환법칙과 결합법칙을 이용하여 계산하기

$$\begin{aligned} 3a\times 2b &= 3\times a\times 2\times b \\ &= 3\times 2\times a\times b \quad \text{교환법칙} \\ &= (3\times 2)\times(a\times b) \quad \text{분배법칙} \\ &= 6ab \end{aligned}$$



(2) 단항식의 나눗셈: 분수 꼴로 바꾸어 계산하거나 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 계산한다. 이때 단항식의 나눗셈에서도 단항식의 곱셈과 마찬가지로 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

방법 1] $15a^2b \div 3a = \frac{15a^2b}{3a}$ ← 분수 꼴로 바꾼다

$= \frac{15}{3}\times\frac{a^2b}{a}$ ← 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

$= 5\times ab$

$= 5ab$

방법 2] $15a^2b \div 3a = 15a^2b\times\frac{1}{3a}$ ← 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 고친다.

$= 15\times\frac{1}{3}\times\frac{a^2b}{a}$ ← 계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 계산한다.

$= 5\times ab$

$= 5ab$

〈스스로 확인하기〉

확인16〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $4a \times 3a$

(2) $3x^2 \times 6y^3$

확인17〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $16a^{12} \div 8a^4$

(2) $12a^7 \div \frac{4}{3}a^3$

확인18〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $9a^3 \times 4a^4 \div 6a^5$

(2) $(-2xy^2)^3 \times \frac{3}{4}x^2 \div (-6x^2y^4)$

3. 다항식의 계산

(1) 다항식의 덧셈과 뺄셈: 문자가 2개 이상인 다항식의 덧셈과 뺄셈은 문자가 1개인 일차식과 마찬가지로 먼저 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 간단히 한다. 이때 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

예) $(2a+3b)+(4a-b) = 2a+3b+4a-b$ ← 괄호를 푼다.

$= 2a+4a+3b-b$ ← 교환을 이용한다

$= (2+4)a+(3-1)b$ ← 분배법칙을 이용한다

$= 6a+2b$

(2) 이차식의 덧셈, 뺄셈

① 이차식: 다항식의 각 항의 차수 중에서 가장 큰 차수가 2인 다항식

② 이차식의 덧셈, 뺄셈도 일차식의 덧셈, 뺄셈과 같은 방법으로 괄호가 있으면 먼저 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

(3) (단항식)×(다항식)

① 분배법칙을 이용하여 일차식과 수의 곱셈을 계산하는 것처럼, 단항식과 다항식의 곱셈도 분배법칙을 이용하여 계산한다.

예) $2a(3a+4b)=2a\times 3a+2a\times 4b$ ← 분배법칙
$=6a^2+8ab$

$2a(3a+4b)=6a^2+8ab$
전개

② 전개: 단항식과 다항식의 곱을, 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 나타내는 것

(4) (다항식)÷(단항식)

다항식을 단항식으로 나눌 때는 다항식의 각 항을 단항식으로 나누어 계산하거나 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 계산한다.

〈스스로 확인하기〉

확인19〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3(2a-4b)+(5a+9b)$

(2) $2(x-3y+1)-(x-5y-2)$

확인20〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(2a+3b)\times(-3a)$

(2) $x(2x-3y)$

확인21〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(2a^2+3ab)\div\frac{1}{6}a$

(2) $(16xy^2-4xy+12y^2)\div 4y$

다항식의 곱셈과 인수분해 (중3)

1. 다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

다항식과 다항식의 곱셈을 전개할 때, 전개한 식에 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

(2) 곱셈공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

④ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑤ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$(a+b)(a+b)$ $(a-b)(a-b)$ $(a+b)(a-b)$ $(x+a)(x+b)$ $(ax+b)(cx+d)$

〈스스로 확인하기〉

확인22〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(2a+1)^2$

(2) $(x+3)^2$

(3) $(a-2)^2$

(4) $(3x-2y)^2$

(5) $(a+3)(a-3)$

(6) $(x+2y)(x-2y)$

(7) $(a+2)(a+3)$

(8) $(x-1)(x+3)$

(9) $(2a-1)(3a+1)$

(10) $(2x+y)(3x-2y)$

2. 인수분해

(1) 인수분해

① 인수: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 인수

② 인수분해: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 '인수분해한다'라고 한다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} \underbrace{(x+1)}_{\text{인수}}\underbrace{(x+2)}_{\text{인수}}$$

③ 다항식의 각 항에 공통인 인수가 있을 때는 분배법칙을 이용하여 공통인 인수를 묶어 내어 인수분해할 수 있다.

$$ma+mb=m(a+b)$$

$ma+mb$ (공통인 인수: m)

(2) 인수분해 공식

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

② $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

※ 완전제곱식: $(a+1)^2$, $2(a-b)^2$, $-3(2x-3y)^2$등과 같이 다항식의 제곱으로 이루어진 식 또는 그 식에 수를 곱한 식

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

④ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

〈스스로 확인하기〉

확인23〉 다음 식을 간단히 하시오.

(1) a^2+4a+4

(2) $x^2+12x+36$

(3) $a^2-10a+25$

(4) x^2-6x+9

(5) a^2-25

(6) $4x^2-9y^2$

(7) x^2-x-6

(8) x^2+5x+6

(9) $3a^2+7a+2$

(10) $3x^2-8x+4$

수학 도움닫기
1-0

중학교 문제로 다지기

문제 1

다음은 다항식 $-2x+3$에 대한 설명이다. $A+B+C$의 값을 구하시오.

- 차수가 [A] 인 다항식이다.
- x의 계수는 [B] 이다.
- 상수항은 [C] 이다.

문제 2

식을 간단히 한 결과가 옳은 것은?

① $(x^3)^3 = x^6$

② $x^2 \times x^5 = x^7$

③ $x^2 \div x^6 = x^4$

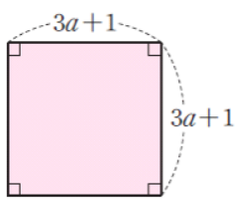
④ $(x^4)^3 \div x^2 = x^6$

⑤ $(-2x^2y)^3 = 8x^6y$

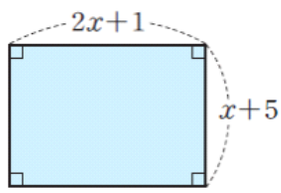
문제 3

곱셈공식을 이용하여 다음 도형의 넓이를 구하시오,

(1)



(2)



문제 4

다항식 $(x+3)(x-2)$의 인수 중 일차항의 계수가 1인 일차식을 모두 구하시오.

문제 5

지면에서 $1\,\mathrm{km}$씩 높아질 때마다 기온은 $6\,℃$씩 낮아진다고 한다. 현재 지면의 기온이 $25\,℃$일 때, 높이가 $x\,\mathrm{km}$인 곳의 기온을 x를 사용하여 나타내고 높이가 $2\,\mathrm{km}$인 곳의 기온을 구하시오.

문제 6

$A=2x-5$, $B=-3x+4$일 때, $2A-B$를 계산하시오.

문제 7

그림과 같은 사각형의 각 칸에 x, x^2, x^3, …, x^9를 한 번씩만 써서 가로, 세로, 대각선에 있는 세 식의 곱이 같게 하려고 한다. ㉠, ㉡에 들어갈 식을 각각 구하시오.

x^2		㉠
	x^5	
x^4	㉡	x^8

문제 8

다음을 모두 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

$$\left(\frac{2}{5^a}\right)^3=\frac{2^3}{5^{18}} \qquad \left(\frac{7^a}{5^3}\right)^2=\frac{7^c}{5^b}$$

문제 9

$(2x-a)(bx+5)$를 전개한 식이 $6x^2+cx-15$일 때, 세 수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

문제 10

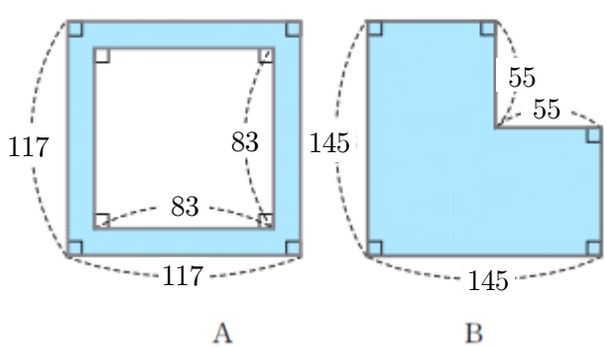
$4x^2+(3k-1)x+25$가 완전제곱식이 되기 위한 수 k의 값을 모두 구하시오.

문제 11

$x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, $x^2+2xy+y^2$의 값을 구하시오.

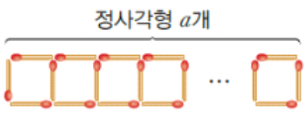
문제 12

다음 두 도형 A, B에서 색칠한 부분의 넓이를 인수분해를 이용하여 구하시오.



문제 13

그림과 같이 성냥개비를 사용하여 정사각형을 만들려고 한다.

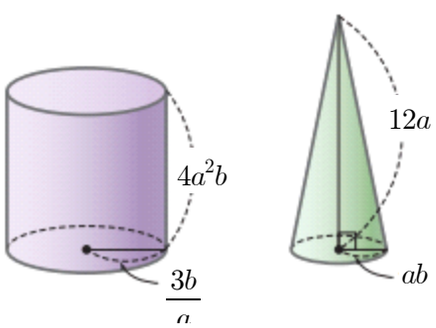


(1) a개의 정사각형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 a를 이용한 식으로 나타내시오.

(2) 20개의 정사각형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 구하시오.

문제 14

정하와 석정이가 운동을 한 후, 그림과 같은 그릇으로 물을 마셨다. 정하는 원기둥 모양의 그릇을 고르고, 석정이는 원뿔 모양의 그릇을 골랐다. 정하가 마신 물의 양은 석정이가 마신 물의 양의 몇 배인지 구하시오. (단, 물은 가득 담겨 있으며 흘리거나 남긴 것이 없다고 한다.)



문제 15

x^2+6x+k가 $(x+a)(x+b)$로 인수분해 될 때, k가 될 수 있는 수 중에서 가장 큰 수를 구하시오.
(단, a, b는 정수)

문제 16

자연수 x에 대하여 $x^2-12x+27$의 값이 소수가 되도록 하는 x의 값과 그때의 소수를 구하시오.

수학 멀리뛰기
1-1

다항식의 연산

1. 다항식의 정리

- 다항식을 차수의 크기 순서로 정리하면 계산할 때 편리하다.

(1) 내림차순: 다항식을 한 문자에 대하여 **차수가 높은 항부터 낮은 항**의 순서로 나타내는 것

예) 다항식 $5x-3x^2-1$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $-3x^2+5x-1$

(2) 오름차순: 다항식을 한 문자에 대하여 **차수가 낮은 항부터 높은 항**의 순서로 나타내는 것

예) 다항식 $5x-3x^2-1$를 x에 대하여 오름차순으로 정리하면 $-1+5x-3x^2$

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다항식 $y^2+1-2x+5x^2y-x^3$을 x에 대하여

(1) 내림차순으로 정리하면

$-x^3+\square-2x+\square$

(2) 오름차순으로 정리하면

$(y^2+1)-\square+5x^2y-\square$

확인2〉 다항식 $2x^3-6xy^2+x^2y+3y^3-1$에 대하여 다음과 같이 정리하시오.

(1) x에 대한 내림차순

(2) y에 대한 오름차순

2. 다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 다항식의 덧셈: 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다.

예) 두 다항식 $A=5x^3-x^2+3x-4$, $B=2x^3-x+1$에 대하여 $A+B$를 계산하시오.

【방법1】 $A+B$

$=(5x^3-x^2+3x-4)+(2x^3-x+1)$

$=5x^3-x^2+3x-4+2x^3-x+1$

$=5x^3+2x^3-x^2+3x-x-4+1$

$=(5+2)x^3-x^2+(3-1)x+(-4+1)$

$=7x^3-x^2+2x-3$

【방법2】

$$\begin{array}{rr} & 5x^3- x^2+3x-4 \\ +) & 2x^3 \quad\quad - x+1 \\ \hline & 7x^3- x^2+2x-3 \end{array}$$

(2) 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① **교환법칙** $A+B=B+A$

② **결합법칙** $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 다항식의 뺄셈: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

예) 두 다항식 $A=5x^3-x^2+3x-4$, $B=2x^3-x+1$에 대하여 $A-B$를 계산하시오.

【방법1】 $A-B$

$=(5x^3-x^2+3x-4)-(2x^3-x+1)$

$=5x^3-x^2+3x-4-2x^3+x-1$

$=5x^3-2x^3-x^2+3x+x-4-1$

$=(5-2)x^3-x^2+(3+1)x+(-4-1)$

$=3x^3-x^2+4x-5$

【방법2】

$$\begin{array}{rl} & 5x^3- x^2+3x-4 \\ -) & 2x^3 \quad\quad -x+1 \\ \hline & 3x^3- x^2+4x-5 \end{array}$$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 두 다항식 $A=2x^2+5xy-2y^2$, $B=3x^2-4xy+2y^2$ 에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $2A+B$

$=2(2x^2+5xy-2y^2)+(3x^2-4xy+2y^2)$

$=\square x^2+\square xy-\square y^2+3x^2-4xy+2y^2$

$=(\square+\square)x^2+(\square-\square)xy+(-\square+\square)y^2$

$=\square x^2+\square xy-\square y^2$

(2) $(3A-B)-2(A+B)$

$=3A-B-2A-2B=A-\square B$

$=(2x^2+5xy-2y^2)-3(3x^2-4xy+2y^2)$

$=2x^2+5xy-2y^2-\square x^2+\square xy-\square y^2$

$=(\square-\square)x^2+(\square+\square)xy+(-\square-\square)y^2$

$=\square x^2+\square xy-\square y^2$

확인4〉 두 다항식 $A=x^2-6xy+2y^2$, $B=-2x^2-xy+3y^2$ 에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $2A-B$

(2) $(2A+B)-(A-B)$

확인5〉 세 다항식 $A=x^3-x^2+2x+1$, $B=-2x^2+x-3$, $C=3x^3-5x^2+2$에 대하여 $(2A-B)-(-A+C)$을 계산하시오.

3. 다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈: 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 계산한다.

예) $(2x+3)(x^2-2x+4)$

$=2x(x^2-2x+4)+3(x^2-2x+4)$ ⇒ 분배법칙 이용하기

$=2x^3-4x^2+8x+3x^2-6x+12$ ⇒ 식 전개하기

$=2x^3+(-4+3)x^2+(8-6)x+12$ ⇒ 동류항끼리 모아서 계산하기

$=2x^3-x^2+2x+12$

(2) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① **교환법칙** $AB=BA$

② **결합법칙** $(AB)C=A(BC)$

③ **분배법칙** $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

〈스스로 확인하기〉

확인6〉 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x^2-x+4)$

(2) $(x+y-3)(2x-4y-1)$

(3) 곱셈공식

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b-2c)^2$

$=a^2+b^2+(\square)^2+2\times a\times b+2\times b\times(-2c)+2\times a\times(-2c)$

$=a^2+b^2+\square c^2+\square ab-\square bc-\square ac$

(2) $(x-3y+z)^2$

(3) $(x+3y)^3$

$=x^3+3\times(\square)^2\times 3y+3\times x\times(\square)^2+(\square)^3$

$=x^3+\square x^2y+\square xy^2+\square y^3$

(4) $(2a-b)^3$

(5) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

$=(a-2b)(a^2+a\times 2b+(2b)^2)$

$=(\square)^3-(\square)^3=\square-\square$

(6) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

4. 다항식의 나눗셈

(1) 다항식의 나눗셈: 두 다항식을 각각 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

(2) 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 다음이 성립한다.

$A=BQ+R$ (단, R의 차수는 B의 차수보다 낮거나 R은 상수이다.)

특히, $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

예) 자연수의 나눗셈

$$\begin{array}{r} 23 \\ 18\overline{)\,425} \\ 36 \\ \hline 65 \\ 54 \\ \hline 11 \end{array}$$

← 몫
← 18×2
← 18×3
← 나머지

$425=18\times 23+11$

예) 다항식 $2x^2-5x+7$을 다항식 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x-1\overline{)\,2x^2-5x+7} \\ 2x^2-2x \\ \hline -3x+7 \\ -3x+3 \\ \hline 4 \end{array}$$

← 몫
← $(x-1)\times 2x$
← $(x-1)\times(-3)$
← 나머지

$2x^2-5x+7=(x-1)(2x-3)+4$

〈스스로 확인하기〉

확인8〉 다음 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하시오.

(1)

$$x-2\overline{)\,\square+3x+2\;\big|\;2x^3-x^2-4x+5}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3-4x^2 \\ \hline \square-4x \\ \square-\square \\ \hline \square+5 \\ \square-\square \\ \hline \square \end{array}$$

몫:

나머지:

(2) $(x^3+2x^2-4)\div(x+3)$

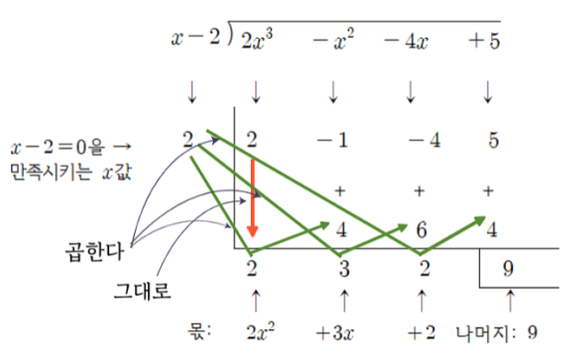
$$x+3\overline{)\,x^3+2x^2\qquad -4}$$

몫:

나머지:

(3) 조립제법: 다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수와 상수항을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

예)



〈스스로 확인하기〉

확인9〉 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$(x^3+2x^2-4)\div(x+3)$

1	2	0	−4

몫:

나머지:

대표유형 다항식의 덧셈과 뺄셈

1. 두 다항식 $A=x^2+3x-2$, $B=2x^2-x+1$에 대하여 $2A-B$를 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 두 다항식 $A=3x^3-x^2-2$, $B=x^3+2x^2-x+1$에 대하여 $A-2B$를 구하시오.

대표유형 다항식의 덧셈과 뺄셈

2. 세 다항식 $A=x^2-xy+2y^2$, $B=x^2-y^2$, $C=x^2+xy+y^2$에 대하여 $(A+2B)-(B+C)$를 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 세 다항식 $A=-x^3+4x-2$, $B=x^2+3x+4$, $C=2x^3+5x^2-x$ 에 대하여 $(A-B)-(2B-C)$를 구하시오.

대표유형 다항식의 곱셈

3. $(x^2-2x+3)(x+4)$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

쌍둥이유형

3-1. $(x-2y)(x^2+5xy-y^2)$의 전개식에서 x^2y의 계수는?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 3

대표유형 다항식의 곱셈 공식

4. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르시오.

<보기>

ㄱ. $(a+2b-c)^2 = a^2+4b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$

ㄴ. $(x+2)^3 = x^3+2x^2+4x+8$

ㄷ. $(a-3b)^3 = a^3-9a^2b+27ab^2-27b^3$

ㄹ. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$

ㅁ. $(3a-1)(9a^2+3a+1) = 9a^3-1$

쌍둥이유형

4-1. 식을 전개한 것 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(3x-2)^3 = 27x^3-54x^2+36x-8$

② $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = 8x^3-y^3$

③ $(x-y+3z)^2 = x^2+y^2+9z^2+2xy-6yz+6zx$

④ $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2) = a^3+27b^3$

⑤ $(x+5y)^3 = x^3+15x^2y+75xy^2+125y^3$

대표유형 곱셈 공식의 변형

5. $x+y=3$, $xy=-4$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

5-1. $x-y=2$, $xy=-2$일 때, x^3-y^3의 값을 구하시오.

대표유형 다항식의 나눗셈

6. 다항식 $3x^2+4x-9$을 $x-1$로 나누는 과정의 일부이다. (가)에 알맞은 다항식은?

$$\begin{array}{r} 3x \\ x-1 \overline{)\ 3x^2+4x-9} \\ \underline{3x^2-3x} \\ \boxed{\text{(가)}} \end{array}$$

① $-7x-9$ ② $x-9$ ③ $x+9$

④ $7x-9$ ⑤ $7x+9$

쌍둥이유형

6-1. 다항식 $2x^3-4x^2+x+1$을 x^2-x+2로 나누는 과정의 일부이다. $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수)

$$\begin{array}{r} ax-2 \\ x^2-x+2 \overline{)\ 2x^3-4x^2+x+1} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ -2x^2-3x+1 \\ \underline{-2x^2+2x-4} \\ -5x+b \end{array}$$

① -1 ② 1 ③ 3

④ 5 ⑤ 7

대표유형 다항식의 나눗셈

7. $(x^3-7x+3)\div(x+1)$의 몫을 A, 나머지를 B라 할 때, $A+B$를 구하시오.

쌍둥이유형

7-1. 다항식 $4x^3-5x^2+2x-9$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $-2x+k$일 때, k의 값을 구하시오.

대표유형 다항식의 몫과 나머지

8. 다항식 A를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫이 x^2+2 이고, 나머지가 -5일 때, 다항식 A는?

① $-3x^3+x^2-6x-7$

② $-3x^3+2x^2+6x-5$

③ $3x^3+2x^2-6x-7$

④ $3x^3-x^2+6x-7$

⑤ $3x^3+x^2-6x-5$

쌍둥이유형

8-1. 다항식 A를 x^2+3x-5 로 나누면 몫이 $2x-1$ 이고, 나머지가 $x-3$라 할 때, 다항식 A를 구하시오.

수학 멀리뛰기

1-2 항등식의 성질, 나머지정리

1. 항등식

(1) 항등식: 문자를 포함한 등식에서 그 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

예) $(x+2)^2=x^2+4x+4$는 x에 대해 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식이다. → 항등식

(2) 방정식: 미지수의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식

예) $x^2+2x-3=0$과 같이 $x=-3$ 또는 $x=1$을 대입하였을 때만 성립하는 등식이다. → 방정식

Tip. 항등식의 여러 가지 표현에 대해 알아봅시다.

① **모든 실수 x에서** 항상 성립한다.
② **x의 값에 관계없이** 항상 성립한다.
③ **임의의 실수 x에 대하여** 항상 성립한다.
④ **어떤 x의 값에 대하여도** 항상 성립한다.

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 등식 중에서 항등식인 것을 찾으시오.

(1) $x+x=2x$

(2) $3x-5=3(x-5)$

(3) $2x+4=2(x+2)$

(4) $x+4=3(x+4)-2(x+4)$

(5) $x^2-3x-4=0$

(3) 항등식의 성질

① 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면, $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.
$a=0$, $b=0$, $c=0$이면 등식 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

② 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$는 x에 대한 항등식이다.

〈스스로 확인하기〉

확인2〉 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 세 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

(1) $(a-2)x^2+(b+1)x+3-c=0$

항등식의 성질 ①에 의해 주어진 등식이 x에 대한 항등식이면 $a-2=\square$, $b+1=\square$, $3-c=\square$이다. 즉, $a=\square$, $b=\square$, $c=\square$이다.

(2) $2x^2+bx-3=ax^2+4x+c$

항등식의 성질 ②에 의해 주어진 등식이 x에 대한 항등식이면 등식의 양변의 x^2의 계수, x의 계수, 상수항이 각각 같다. 즉, x^2의 계수인 $\square=\square$, x의 계수 $\square=\square$, 상수항 $\square=\square$이므로 $a=\square$, $b=\square$, $c=\square$이다.

(4) 미정계수법: 항등식의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 등식에서 정해져 있지 않은 계수를 정하는 방법

① 계수비교법: 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법

② 수치대입법: 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법

예) 등식 $a(x-3)+b(x-2)=x-5$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 두 상수 a, b의 값을 구하시오.

풀이)

① **계수비교법**: 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면 $ax-3a+bx-2b=x-5$ 이다,
항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a+b=1$, $-3a-2b=-5$ 이고,
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

② **수치대입법**: 항등식은 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하므로 주어진 등식에 $x-3=0$, $x-2=0$을 만족시키는 x의 값 $x=3$, $x=2$를 대입한다.
양변에 $x=3$을 대입하면 $b=-2$, 양변에 $x=2$를 대입하면 $a=3$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 등식 $-a(x-3)+b(x+2)=3x+16$이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 두 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) 계수비교법: 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면 ( ) = ( ) 이다.
항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항의 계수를 비교하면 ( )=3, ( )=16이고,
두 식을 연립하여 풀면 $a=\square$, $b=\square$이다.

(2) 수치대입법: 항등식은 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하므로 주어진 등식에
$x-3=0$, $x+2=0$을 만족시키는 x의 값 $x=$□, $x=$□를 대입한다.
a를 구하기 위해 양변에 $x=$□을 대입하면 $a=$□,
b를 구하기 위해 양변에 $x=$□를 대입하면 $b=$□ 이다.

2. 나머지정리

(1) 나머지정리: 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 때, 직접 나눗셈을 하지 않고 항등식의 성질을 이용하여 나머지를 구하는 방법

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 $R=f(\alpha)$

예) 다항식 $f(x)=x^2+2x+1$을 일차식 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 R은

① 직접 나눗셈을 한 경우:

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x-2\overline{)\,x^2+2x+1} \\ \underline{x^2-2x} \\ 4x+1 \\ \underline{4x-8} \\ 9 \end{array}$$

이므로 $R=9$임을 알 수 있다.

② 나머지정리를 이용하면 $R=f(2)=2^2+2\times2+1=9$이므로 $R=f(2)=9$임을 알 수 있다.
즉, 나눗셈을 직접 하지 않아도 나머지를 쉽게 구할 수 있다.

(2) 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지 $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

예) 다항식 $f(x)=18x^2-9x+4$을 일차식 $3x-1$로 나누었을 때의 나머지 R은

① 직접 나눗셈을 한 경우:

$$\begin{array}{r} 6x-1 \\ 3x-1\overline{)\,18x^2-9x+4} \\ \underline{18x^2-6x} \\ -3x+4 \\ \underline{-3x+1} \\ 3 \end{array}$$

이므로 $R=3$임을 알 수 있다.

② 나머지정리를 이용하면 $R=f\left(\frac{1}{3}\right)=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-9\times\left(\frac{1}{3}\right)+4=2-3+4=3$이므로

$R=f\left(\frac{1}{3}\right)=3$임을 알 수 있다.

Tip. $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$에서 $-\frac{b}{a}$가 의미하는 것은 등식 $ax+b=0$이 성립하는 x의 값 $-\frac{b}{a}$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 다항식 $f(x)=3x^3+2x^2-1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x-1$

$f(\square)=3\times\square^3+2\times\square^2-1=$

(2) $3x-1$

$f\left(\frac{\square}{\square}\right)=3\times\left(\frac{\square}{\square}\right)^3+2\left(\frac{\square}{\square}\right)^2-1=$

3. 인수정리

(1) 인수정리: 다항식 $f(x)$에 대하여

① $f(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

Tip. 다음은 모두 같은 뜻이다.

- ▶ 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
- ▶ 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
- ▶ 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.
- ▶ $f(\alpha)=0$

예) 다항식 $f(x)=x^2-6x+5$에 대하여

$f(1)=1^2-6\times1+5=0$, $f(5)=5^2-6\times5+5=0$이므로 $f(1)=0$, $f(5)=0$이다.

다항식 $f(x)$는 두 일차식 $x-1$, $x-5$로 모두 나누어떨어진다.

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 물음에 답하시오.

(1) 다항식 $f(x)=x^2-ax+2$가 $x-2$로 나누어떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

인수정리에 의하여 $f(\square)=\square^2-a\times\square+2=\square$ 이므로, $\therefore\ a=\square$

(2) 다항식 $f(x)=2x^2+ax-3$가 $2x-1$로 나누어떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

인수정리에 의하여 $f\left(\frac{\square}{\square}\right)=2\times\left(\frac{\square}{\square}\right)^2+a\times\left(\frac{\square}{\square}\right)-3=\square$ 이므로 $\therefore\ a=\square$

대표유형 항등식의 성질

1. $(k+1)x+(2k-1)y-k-10=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 x, y의 값을 각각 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $a(2x+y)-b(3x+y)-3x-3y=0$이 성립할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

대표유형 미정계수법

2. 주어진 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$$(x^2+ax-1)(x-2)=x^3+bx^2-9x+2$$

쌍둥이유형

2-1. 주어진 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

$$6x^2-8x-2=a(x-2)(x+1)+bx(x-2)+cx(x+1)$$

대표유형 나머지정리

3. 다항식 $f(x)=x^3+ax-1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 11일 때, 상수 a의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

쌍둥이유형

3-1. 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 4이고, $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 8일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

대표유형 인수정리

4. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이고, $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 5일 때, $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이고, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 5일 때, $xf(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

수학 멀리뛰기

1-3 인수, 인수분해

1. 인수

(1) 인수: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 인수라고 한다.

예) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$에서 $x+1$과 $x+2$는 x^2+3x+2의 인수이다.

예) $x^2+2x=x(x+2)$에서 x과 $x+2$는 x^2+2x의 인수이다.

예) $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$에서 $x+3$과 $x-1$는 x^2+2x-3의 인수이다.

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다항식의 인수를 찾는 과정이다. □ 안에 알맞은 문자나 식을 넣으시오.

(1) 다항식 $x^2+xy=$□$(x+y)$이다.

인수는 □, □ 이다.

(2) 다항식 $a^2-1=$(□$)(a-1)$이다.

인수는 □, □ 이다.

2. 인수분해

(1) 인수분해: 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 인수분해한다고 한다.

x^2+3x+2 ⇄ (인수분해 / 전개) $(x+1)(x+2)$

($(x+1)$, $(x+2)$: 인수)

예) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$이므로 x^2+3x+2을 인수분해하면 $(x+1)(x+2)$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인2〉 다항식을 인수분해하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수, 문자나 식을 넣으시오.

(1) 다항식 a^2+ab에서 두 항 a^2, ab에 공통으로 있는 인수는 □이므로 $a^2+ab=$□$(a+b)$

(2) 다항식 $xy-2y+6xy^2$에서 세 항 xy, $-2y$, $6xy^2$에 공통으로 있는 인수는 □이므로

$xy-2y+6xy^2=$□$(x-$□$+6xy)$

3. 인수분해 기본공식1

1. $ma+mb-mc=m(a+b-c)$
2. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

   $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
4. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
5. $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 다항식을 인수분해 하시오.

(1) a^2-4a (2) $2ab+3a^2b^2$

(3) x^3y^2-2xy (4) $xy-4xy^2+2x^2y$

확인4〉 다항식을 인수분해 하시오.

(1) a^2-4a+4 (2) a^2b-b

(3) x^2+5x+6 (4) $x^2y-3xy+2y$

4. 인수분해 기본공식2

1. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
2. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

   $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
3. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

   $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
4. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
5. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

〈스스로 확인하기〉

확인5-1〉 다항식의 인수분해 과정에서 □ 안에 알맞은 식을 써넣으시오.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = a^2+2(\square)a+b^2+2bc+c^2$$
$$= a^2+2(\square)a+(\square)^2$$
$$= \{a+(\square)\}^2$$
$$= (a+b+c)^2$$

확인5-2〉 인수분해 하시오.

$$a^2+b^2+4+2ab+4b+4a = a^2+2(\square)a+(\square)^2$$
$$= (\square)^2$$

확인6-1〉 다항식의 인수분해 과정에서 □ 안에 알맞은 식을 써넣으시오.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$$
$$= a^2(\square)+2ab(\square)+b^2(\square)$$
$$= (\square)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= (\square)^3$$

확인6-2〉 인수분해 하시오.

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

확인7-1〉 다항식의 인수분해 과정에서 □ 안에 알맞은 식을 써넣으시오.

$$a^3+b^3 = a^3+a^2b-\square+b^3$$
$$= a^2(a+b)-b(\square)$$
$$= a^2(a+b)-b(\square)(\square)$$
$$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

확인7-2〉 인수분해 하시오.

$a^3-b^3=a^3-a^2b+\square-b^3$

$=$

$=$

$=$

확인8-1〉 다항식의 인수분해 과정에서 □ 안에 알맞은 식을 써넣으시오.

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^4+2a^2b^2+b^4)-(\square)^2$

$=(\square)^2-(\square)^2$

$=(a^2+b^2+ab)(\square)$

$=(a^2+ab+b^2)(\square)$

확인8-2〉 인수분해 하시오.

$a^4-3a^2b^2+b^4=(a^4-2a^2b^2+b^4)-(\square)^2$

$=$

$=$

$=$

확인9-1〉 다항식의 인수분해 과정에서 □ 안에 알맞은 식을 써넣으시오.

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-\square$

$=(a+b)^3+c^3-3ab\{(a+b)+c\}$

$=\{(a+b)+c\}\{\square\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{\square\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(\square)-3ab\}$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+\square)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(\square)^2+(c-a)^2\}$

확인9-2〉 인수분해 하시오.

$a^3+b^3+8-6ab=$

$=$

5. 다양한 인수분해 방법

방법1) 치환하여 인수분해하기

$$x^2+4xy+4y^2-x-2y-6 = (x+2y)^2-(x+2y)-6 \quad [\ x+2y=t\text{로 치환}\ ]$$
$$= t^2-t-6$$
$$= (t-3)(t+2) \quad [\ t\text{에 } x+2y\text{를 대입}\ ]$$
$$= (x+2y-3)(x+2y+2)$$
$$= (x+2y-3)(x+2y+2)$$

방법2) 한 문자에 관하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하기

$$x^2+3xy+2y^2+x+3y-2 = x^2+(3y+1)x+2y^2+3y-2$$
$$= x^2+(3y+1)x+(y+2)(2y-1)$$
$$= (x+y+2)(x+2y-1)$$

방법3) 여러 문자에 관한 식의 인수분해

$$x^3+x^2z+xz^2-y^3-y^2z-yz^2 = (x-y)z^2+(x^2-y^2)z+x^3-y^3$$
$$= (x-y)z^2+(x-y)(x+y)z+(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$= (x-y)\{z^2+(x+y)z+x^2+xy+y^2\}$$
$$= (x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

대표유형 공통인수를 이용한 인수분해

1. 각 항에서 공통으로 있는 인수를 이용하여 인수분해 하시오.

(1) $6x^3y^2-4x^2y^2+12x^2y^3$

(2) $(a-b)c+(b-a)d$

쌍둥이유형

1-1. 다항식 $3a^2-a^3+3-a$를 인수분해하시오.

대표유형 세제곱 공식을 이용한 인수분해

2. 인수분해 하시오.

(1) $8a^3+27b^3$

(2) a^6-b^6

쌍둥이유형

2-1. 인수분해 하시오.

(1) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

(2) $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$

대표유형 치환을 이용한 인수분해1

3. 다항식을 인수분해하시오.

$$(x^2-4x)^2-2x^2+8x-8$$

쌍둥이유형

3-1. 다항식을 인수분해하시오.

$$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)+24$$

대표유형 치환을 이용한 인수분해2(복이차식)

4. 다항식을 인수분해하시오.

x^4-3x^2+2

쌍둥이유형

4-1. 다항식을 인수분해하시오.

(1) x^4+x^2+1

(2) $x^4-6x^2y^2+y^4$

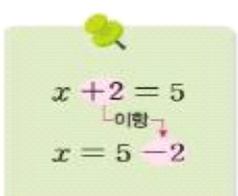
2

방정식과 부등식

2-0 중학교 개념으로 확인하기
2-0 중학교 문제로 다지기
2-1 복소수
2-2 이차방정식의 판별식, 근과 계수와의 관계
2-3 이차방정식과 이차함수
2-4 여러 가지 방정식
2-5 일차부등식
2-6 이차부등식

수학 도움닫기
2-0 중학교 개념으로 확인하기

일차방정식 (중1)



1. 방정식: x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식
   예) $3x+1=4$는 $x=1$일 때 참이 되고, $x\neq 1$일 때 거짓이 됨
   예) x에 관한 방정식: $3x+1=4$
2. 해(근): 방정식을 참이 되게 하는 미지수 x의 값
3. 방정식을 푼다: 방정식의 해를 구하는 것
4. 이항: 등식의 어느 한 변에 있는 항의 부호를 바꾸어 다른 변으로 옮기는 것
5. 일차방정식: 방정식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때 (일차식)$=0$의 꼴이 되는 방정식
6. 항등식: 미지수 x에 어떤 수를 대입하여도 항상 참이 되는 등식

Tip. 일차방정식을 풀 때에는 보통 미지수를 포함한 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항하고, 동류항을 정리하여 푼다.

일차방정식 $-3x+5=11-5x$ 를 푸시오.

$-5x$와 5를 이항하면	$-3x+5x=11-5x$
양변을 정리하면	$2x=6$
양변을 2로 나누면	$x=3$

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 일차방정식 $2(x-3)=12-x$ 를 푸시오.

괄호를 풀면	$2x-6=12-x$
$-x$와 -6을 이항하면	$2x+\square=12+\square$
양변을 정리하면	$\square x=18$
양변을 3으로 나누면	$x=\square$

확인2〉 일차방정식 $\frac{x}{3}-2=\frac{x}{2}-3$ 을 푸시오.

양변에 분모의 최소공배수 6을 곱하면	$2x-\square=\square x-18$
이항하면	$2x-\square=-18+\square$
양변을 정리하면	$-x=-6$
양변에 -1을 곱하면	$x=\square$

확인3〉 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $0.1-0.04x=0.03x+0.31$

(2) $\frac{3}{2}x+1=\frac{2}{5}x-\frac{1}{10}$

이차방정식 (중3)

1. 이차방정식

(1) 이차방정식: 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 나타나는 방정식을 x에 대한 이차방정식이라고 한다.

x에 대한 이차방정식은
$ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 수, $a\neq 0$)

(2) 이차방정식의 해: x의 각 값을 대입하여 이차방정식을 참이 되게 하는 x의 값

예) $x=-2$ 또는 $x=1$일 때, 이차방정식 $x^2+x-2=0$이 참이 됨을 알 수 있다.

Tip. ① 이차방정식의 해는 일반적으로 해가 2개임을 알 수 있다.

② 해를 적는 방법: $x=-2$ 또는 $x=1$

(3) 중근: 두 해가 중복될 때, 이 해를 이차방정식의 중근이라고 한다.

예) $x^2-6x+9=0$의 해를 구하면 $x=3$ 또는 $x=3$이므로 해가 중복이 되므로 $x=3$(중근)을 알 수 있다.

2. 이차방정식의 풀이

(1) 인수분해를 이용하여 이차방정식 풀기

예) 이차방정식 $x^2-4x-12=0$ 을 푸시오.

풀이)

좌변을 인수분해하면 $(x+2)(x-6)=0$

따라서 해는 $x=-2$ 또는 $x=6$

예) 이차방정식 $3x^2+x-4=0$ 을 푸시오.

풀이)

좌변을 인수분해하면 $(3x+1)(x-4)=0$

따라서 해는 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 $(x+3)(2x+1)=-2$ 을 푸시오.

좌변을 정리하면 $2x^2+\square x+3=-2$

(이차식)=0 으로 고치면 $2x^2+\square x+\square=0$

좌변을 인수분해하면 $(\square)(\square)=0$

따라서 해는 $x=\square$ 또는 $x=\square$

확인5〉 $(x+1)(4x-3)=5x-4$ 을 푸시오.

좌변을 정리하면 $4x^2+\square x-3=5x-4$

(이차식)=0 으로 고치면 $4x^2-\square x+\square=0$

좌변을 인수분해하면 $(\quad\square\quad)^2=0$

따라서 해는 $x=\square$ (중근)

(2) 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 풀기

예) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$ 을 푸시오.

풀이)

좌변의 -1을 우변으로 이항하면 $x^2-2x = 1$

양변에 $\left\{(x\text{의 계수})\times\frac{1}{2}\right\}^2$을 더하면 $x^2-2x+(-1)^2=1+(-1)^2$

좌변을 완전제곱식으로 고치고, 우변을 정리하면 $(x-1)^2=2$

$x-1$은 2의 제곱근이므로 $x-1=\pm\sqrt{2}$

따라서 해는 $x=1\pm\sqrt{2}$

〈스스로 확인하기〉

확인6〉 $4x^2-16x+9=0$ 을 푸시오.

풀이)

4로 양변을 나누면	$x^2-4x+\square=0$
좌변의 $\frac{9}{4}$를 우변으로 이항하면	$x^2-4x\ =\ \square$
양변에 $\left\{(x\text{의 계수})\times\frac{1}{2}\right\}^2$을 더하면	$x^2-4x+\square\ =\ \square+\square$
좌변을 완전제곱식으로 고치고, 우변을 정리하면	$(\quad)^2=\square$
$x-2$는 $\frac{7}{4}$의 제곱근이므로	$(\quad)=\pm\sqrt{\square}$
따라서 해는	$x=\square\pm\sqrt{\square}$

(3) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 풀기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$에 대하여 근의 공식은 다음과 같다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 해는

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (\text{단, } b^2-4ac\geq0)$$

예) 이차방정식 $x^2-4x+2=0$ 을 푸시오.

풀이)

근의 공식에 $a=1,\ b=-4,\ c=2$를 대입하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

따라서 해는 $x=2\pm\sqrt{2}$

예) 이차방정식 $3x^2+5x-1=0$ 을 푸시오.

풀이)

근의 공식에 $a=3,\ b=\boxed{5},\ c=-1$를 대입하면

$$x=\frac{\boxed{-5}\pm\sqrt{\boxed{5}^2-4\times\boxed{3}\times(-1)}}{2\times\boxed{3}}=\frac{-5\pm\sqrt{\boxed{37}}}{\boxed{6}}$$

따라서 해는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{\boxed{37}}}{\boxed{6}}$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 푸시오.

(1) $x^2-8x+9=0$

(2) $4x^2+3x-3=0$

일차함수 (중2)

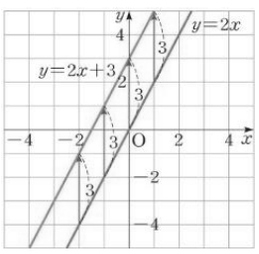
1. 일차함수

(1) 일차함수: 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식으로 나타내어질 때, x에 관한 일차함수라고 한다.

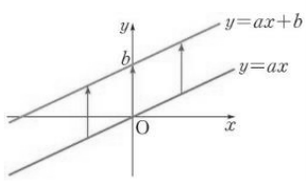
x에 관한 **일차함수는**
$y=ax+b$ $(a,\ b$는 상수, $a\neq 0)$

(2) 일차함수의 그래프: 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.

일차함수 $y=2x+3$의 함숫값은 일차함수 $y=2x$의 함숫값보다 항상 3만큼 크다는 것을 알 수 있다.



일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.



〈스스로 확인하기〉

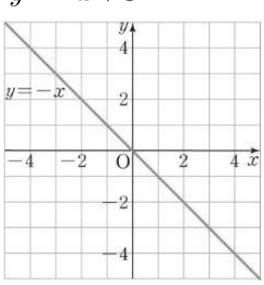
확인8〉 다음 일차함수의 그래프는 일차함수 $y=\frac{2}{3}x$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

(1) $y=\frac{2}{3}x+1$

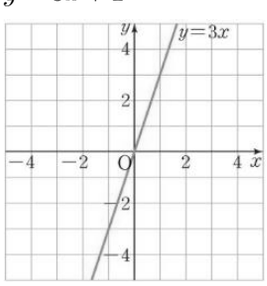
(2) $y=\frac{2}{3}x-4$

확인9〉 아래 그림은 두 일차함수 $y=-x$와 $y=3x$의 그래프를 각각 그린 것이다. 주어진 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 각각 그리시오.

(1) $y=-x+3$



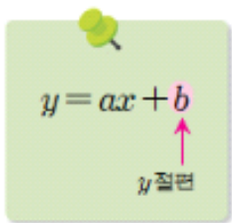
(2) $y=3x+1$



2. 절편을 이용하여 일차함수 그리기

(1) x절편: 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표
(x절편은 일차함수 $y=ax+b$에 $y=0$을 대입하여 구할 수 있다.)

(2) y절편: 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 y축과 만나는 점 y좌표
(y절편은 일차함수 $y=ax+b$에 $x=0$을 대입하여 구할 수 있다.)



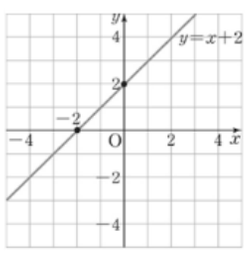
예) x절편과 y절편을 이용하여 일차함수 $y=x+2$의 그래프를 그리시오.

풀이)

$y=x+2$에서 $y=0$일 때 $x=-2$이므로 x절편은 -2이다.

또한, $x=0$일 때 $y=2$이므로 y절편은 2이다.

따라서 일차함수 $y=x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, 0)$, $(0, 2)$를 지나는 직선이다.



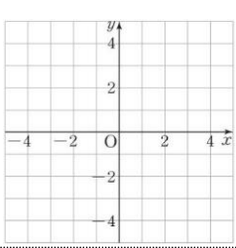
〈스스로 확인하기〉

확인10〉 다음 일차함수의 그래프의 x절편과 y절편을 각각 구하시오.

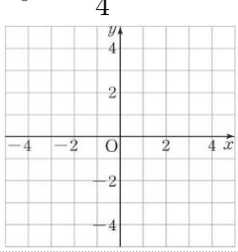
(1) $y=2x-6$ x절편: ☐, y절편: ☐ (2) $y=-4x+12$ x절편: ☐, y절편: ☐

확인11〉 x절편과 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오

(1) $y=x+3$

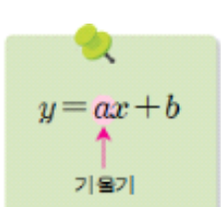


(2) $y=-\frac{1}{4}x+1$



3. 기울기를 이용하여 일차함수 그리기

(1) 기울기: 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며, 그 비율은 x의 계수 a와 같다. 이 증가량의 비율 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기라고 한다.



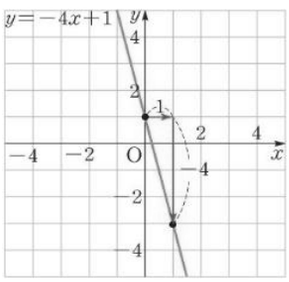
일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

$$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=a$$

예) 기울기와 y절편을 이용하여 일차함수 $y=-4x+1$의 그래프를 그리시오.

풀이)

일차함수 $y=-4x+1$의 그래프는 y절편이 1이므로 점 $(0, 1)$을 지난다.
또, 이 그래프는 기울기가 -4이므로
점 $(0, 1)$에서 x축의 방향으로 1만큼 증가하고, y축의 방향으로 4만큼 감소한 점 $(1, -3)$을 지난다.
따라서 일차함수 $y=-4x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0, 1)$과 $(1, -3)$을 지나는 직선이다.



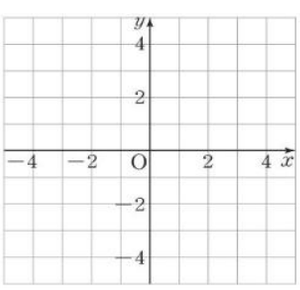
〈스스로 확인하기〉

확인12〉 다음 일차함수의 그래프의 기울기와 y절편을 각각 구하시오.

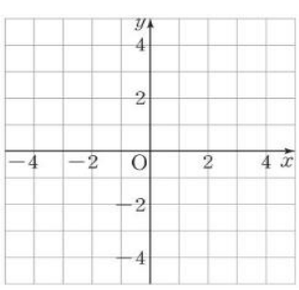
(1) $y=2x-6$ 기울기: □, y절편: □ (2) $y=-4x+12$ 기울기: □, y절편: □

확인13〉 기울기와 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{1}{2}x-1$

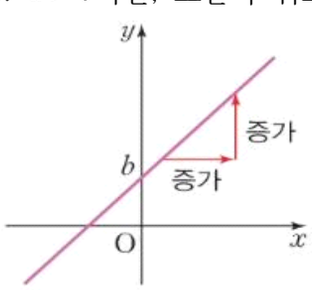


(2) $y=-3x+2$

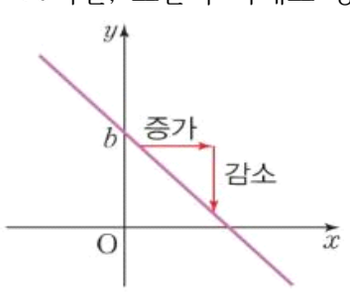


일차함수 $y=ax+b$의 그래프는

1. $a>0$이면, 오른쪽 위로 향하는 직선



2. $a<0$이면, 오른쪽 아래로 향하는 직선



이차함수 (중3)

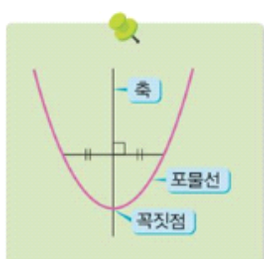
1. 이차함수

(1) 이차함수: 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 이차식으로 나타내어질 때, x에 관한 이차함수라고 한다.

x에 관한 **이차함수는**

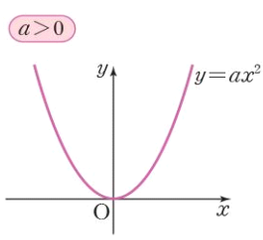
$y=ax^2+bx+c$ $\quad (a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0)$

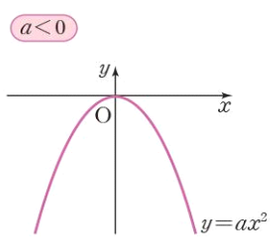
(2) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 포물선이라고 한다. 포물선은 선대칭도형이고, 그 대칭축을 포물선의 축이라고 하며, 포물선과 축의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.



2. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

(1) 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
(2) $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.
(3) $|a|$의 값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
(4) $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.





〈스스로 확인하기〉

확인14〉 다음 이차함수에 대하여 물음에 답하시오.

(1) $y=\frac{2}{3}x^2$

① 꼭짓점:(□, □)

② $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 이차함수는 ( )이다.

(2) $y=-3x^2$

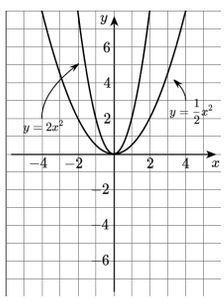
① 꼭짓점:(□, □)

② $y=-3x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 이차함수는 ( )이다.

확인15〉 두 이차함수 $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 각각 오른쪽 좌표평면 위에 그리시오.

(1) $y=-2x^2$

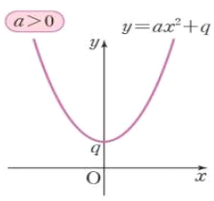
(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$

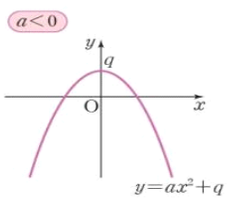


3. 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.





〈스스로 확인하기〉

확인16〉 다음 이차함수의 그래프에 대하여 물음에 답하시오.

(1) $y=\frac{2}{3}x^2-5$

① 꼭짓점:(□, □)

② 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 □ 만큼 평행이동한 것이다.

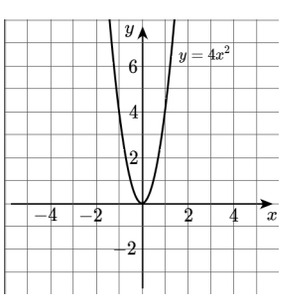
(2) $y=-3x^2+4$

① 꼭짓점:(□, □)

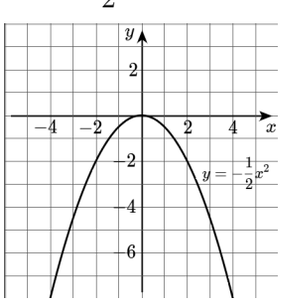
② 이차함수 $y=-3x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 □ 만큼 평행이동한 것이다.

확인17〉 두 이차함수 $y=4x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=4x^2-2$



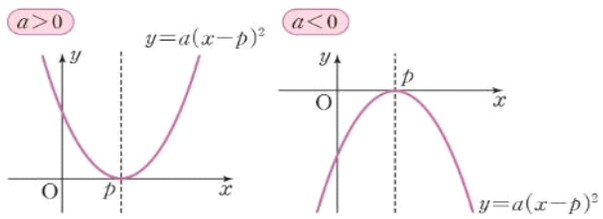
(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+3$



4. 이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

(2) 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.



〈스스로 확인하기〉

확인18〉 다음 이차함수의 그래프에 대하여 물음에 답하시오.

(1) $y=\frac{2}{3}(x-5)^2$

① 꼭짓점:(□, □)

② 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 □만큼 평행이동한 것이다.

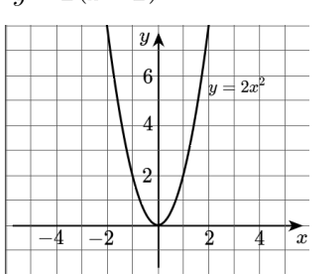
(2) $y=-3(x+4)^2$

① 꼭짓점:(□, □)

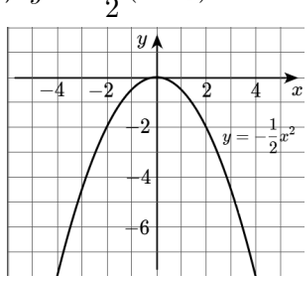
② 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 □만큼 평행이동한 것이다.

확인19〉 두 이차함수 $y=2x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=2(x-2)^2$



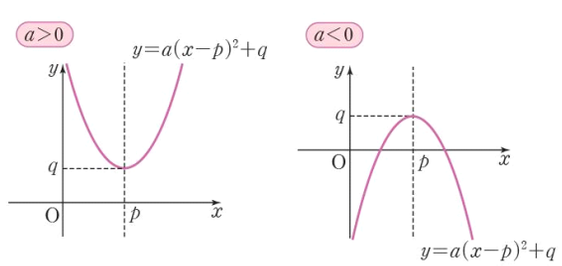
(2) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$



5. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.



6. 이차함수의 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프

(1) $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그릴 수 있다.

(2) 점 $(0,\ c)$를 지난다.

(3) $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

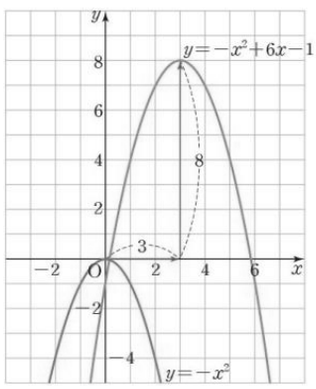
예) 이차함수 $y=-x^2+6x-1$의 그래프를 그리고, 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이)

이차함수 $y=-x^2+6x-1$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면

$$\begin{aligned} y&=-x^2+6x-1\\ &=-(x^2-6x+9-9)-1\\ &=-(x-3)^2-1 \end{aligned}$$

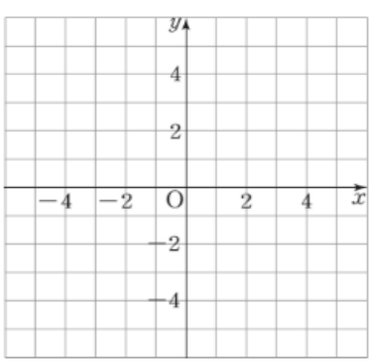
꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 8)$이고, y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ -1)$인 위로 볼록한 포물선이다.



〈스스로 확인하기〉

확인20〉 다음 이차함수의 그래프를 그리고, y절편과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=3x^2-6x+1$

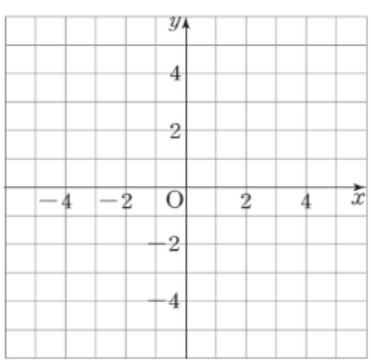


① $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치시오.

② y절편: ( )

③ 꼭짓점의 좌표: ( )

(2) $y=-2x^2+8x-5$



① $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치시오.

② y절편: ( )

③ 꼭짓점의 좌표: ( )

수학 도움닫기
2-0

중학교 문제로 다지기

문제 1

일차방정식 $3x-6=0.2(5x+10)+3$의 해를 구하시오.

문제 2

x에 관한 일차방정식 $7(x+4)+ax=26$의 해가 $x=-2$일 때, a의 값을 구하시오.

문제 3

이차방정식 $x^2-6x-1=2x^2$을 $(x+a)^2=b$의 꼴로 변형할 때, 두 수 a, b의 값을 각각 구하시오.

문제 4

이차방정식 $x^2-8x+k=0$이 중근 $x=a$를 가질 때, 두 수 a, k에 대하여 $a+k$의 값을 구하시오.

문제 5

x에 관한 두 일차방정식의 해가 같을 때, a의 값을 구하시오.

$$\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}=\frac{7x+1}{6}, \qquad 2(3x-a)=x$$

문제 6

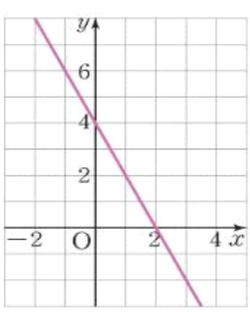
이차방정식 $3x^2+3x+p=0$의 해가 $x=\frac{q\pm\sqrt{33}}{6}$일 때, 두 수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

문제 7

$a>0,\ b<0$일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

문제 8

아래 그래프와 평행한 일차함수 $y=ax-2$의 그래프의 x절편을 구하시오. (단, a는 상수)



문제 9

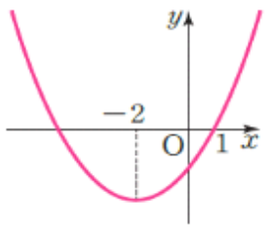
일차함수 $y=-\frac{1}{2}x+4$의 그래프와 x축에서 만나고, 일차함수 $y=\frac{2}{3}x+2$의 그래프와 y축에서 만나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

문제 10

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

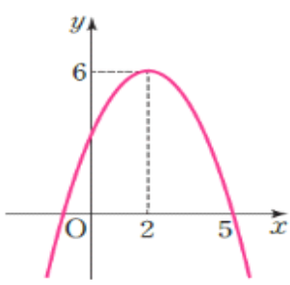
문제 11

이차함수 $y=\frac{1}{3}(x-p)^2+q$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 두두 수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오



문제 12

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 이차함수의 식을 구하시오.
(단 a, b, c는 상수)



문제 13

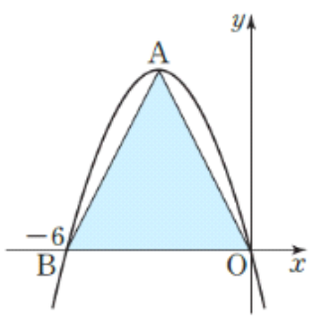
이차방정식 $x^2-kx+k-1=0$이 $x=a$를 중근으로 가질 때, $k+a$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수)

문제 14

이차방정식 $2x^2-9x+k=0$의 한 근이 $x=5$이고 다른 한 근이 $x=m$일 때, $-k+2m$의 값을 구하시오.

문제 15

아래 그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다. 이 그래프의 꼭짓점을 A라 하고, 포물선이 x축과 만나는 두 점을 B, O라고 하자. $\triangle ABO$의 넓이가 18일 때, 세 수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.



문제 16

이차함수 $y=ax^2-2ax+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 13)$을 지나고, 이 그래프의 꼭짓점이 일차함수 $y=-2x+7$의 그래프 위의 점일 때, 두 수 a, b의 값을 각각 구하시오.

수학 멀리뛰기
2-1

복소수

1. 복소수

(1) 허수단위 i : 제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 기호 i와 같이 나타내고, 이것을 허수단위라고 한다.
즉 $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

(2) 복소수: 실수 a , b에 대하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타내어지는 수를 복소수라 하고,
a를 실수부분, b를 허수부분이라 한다.



예: $3+5i$의 실수부분은 3, 허수부분은 5이다.
$-1-2i$의 실수부분은 -1, 허수부분은 -2이다.
$-i$의 실수부분은 0, 허수부분은 -1이다.

(3) 복소수의 분류: 복소수 $a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$를 분류하면 다음과 같다.

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0) \\ \text{허수 } a+bi & (b\neq 0) \end{cases} \text{(단, } a,\ b\text{는 실수)}$$

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 복소수 $3+i$의 실수부분과 허수부분을 각각 구하시오.

확인2〉 복소수 $-2+\sqrt{2}i$의 실수부분과 허수부분을 각각 구하시오.

2. 복소수가 서로 같을 조건

(1) 두 복소수 $a+bi$, $c+di\,(a,\,b,\,c,\,d$는 실수$)$의 실수부분과 허수부분이 각각 서로 같을 때,
즉, $a=c$, $b=d$일 때, 두 복소수는 서로 같다고 하고 $a+bi=c+di$ 와 같이 나타낸다.
$\Rightarrow$ $a,\,b,\,c,\,d$가 실수일 때, $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$이다.
마찬가지로 $a,\,b,\,c,\,d$가 실수일 때, $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

(2) $a+bi=0$ 이면 $a=0$, $b=0$ 이다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 a, b가 실수일 때, $a+bi=1+2i$ 를 만족시키는 a, b의 값을 각각 구하시오.

확인4〉 a, b가 실수일 때, $a+bi=-4i$ 를 만족시키는 a, b의 값을 각각 구하시오.

3. 켤레복소수

(1) 복소수 $a+bi\,(a, b$는 실수$)$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라고 하고, 기호로 $\overline{a+bi}$로 나타낸다.
즉, $\overline{a+bi}=a-bi$ 이다.

$\overline{a+bi}=a-bi$
켤레복소수

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $2+i$ (2) $-i+\sqrt{3}$

확인6〉 다음을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $\overline{5-3i}=a+bi$ (2) $\overline{-5i+2}=a+bi$

4. 복소수의 사칙연산

(1) 복소수의 덧셈과 뺄셈: 복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하고 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아서 계산한다.

(2) 즉, a, b, c, d가 실수일 때,
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 다음을 계산하시오.

(1) $(1+i)+(1-3i)$

(2) $(7-2i)-(4+3i)$

(3) 복소수의 곱셈: 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고 전개한 후, $i^2 = -1$ 임을 이용하여 계산한다. 즉, a, b, c, d 가 실수일 때,

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2$$
$$= ac+adi+bci-bd$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i \quad \text{이다.}$$

〈스스로 확인하기〉

확인8〉 다음을 계산하시오.

(1) $(1+i)(2-i)$

(2) $(i-3)(5-2i)$

(4) 복소수의 나눗셈: 복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 분모를 실수로 고친 후 계산한다. 즉, a, b, c, d 가 실수이고, $c+di \neq 0$ 일 때,

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad \text{이다.}$$

〈스스로 확인하기〉

확인9〉 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{1-i}{1+i}$

(2) $\dfrac{3+2i}{2-i}$

5. 음수의 제곱근

두 복소수 $\sqrt{2}i$ 와 $-\sqrt{2}i$ 를 각각 제곱하면 $(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$, $(-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$ 이므로 $\sqrt{2}i$ 와 $-\sqrt{2}i$ 는 -2 의 제곱근이다. 즉 -2 의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}i$ 로 나타내고, $\sqrt{2}i$ 는 $\sqrt{-2}$ 로 쓴다.

$a>0$일 때,

❶ $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ ❷ $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인10〉 다음 수의 제곱근을 구하시오,

(1) -5

(2) -20

(3) -36

6. 음수의 제곱근의 성질

0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대해

(1) $a<0, b<0$ 이면 $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

(2) $a>0, b<0$ 이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

〈스스로 확인하기〉

확인11〉 다음을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}$

(2) $\sqrt{3}\sqrt{-6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{-4}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-2}}$

대표유형 복소수의 뜻

1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $2i-3$ 의 허수부분은 2이다.

② $-1+\sqrt{2}i$ 의 허수부분은 $\sqrt{2}$ 이다.

③ $-4i$ 의 실수부분은 0이다.

④ π 는 허수이다.

⑤ $\sqrt{6}-9$ 는 실수이다.

쌍둥이유형

1-1. 복소수의 성질을 설명한 것 중 옳은 것은?

① $2i < 0$ 이다.

② $\sqrt{2}$ 는 복소수이다.

③ $1-i$ 의 허수부분은 1이다.

④ $a^2 = -1$ 이면 $a = i$ 이다.

⑤ 9 의 허수부분은 없다.

대표유형 복소수가 같을 조건

2. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

(1) $(x+y)+(2x-3y)i = -1+8i$

(2) $(3x+y)+(x-y)i = 5-i$

쌍둥이유형

2-1. $(x+2y-5)+4i = 2+(6x-y+1)i$ 를 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하시오.

대표유형 복소수의 덧셈

3. 다음을 계산하여라.

(1) $(5+3i)+\overline{6-7i}$

(2) $2(3-4i)+\overline{3-i}$

쌍둥이유형

3-1. 다음을 계산하여라.

(1) $(-9-4i)+\overline{5-2i}$

(2) $-3(-2i+1)+\overline{2-i}$

대표유형 복소수의 뺄셈

4. 다음을 계산하여라.

(1) $(-3+5i)-\overline{6-i}$

(2) $-2(3+4i)-\overline{2-7i}$

쌍둥이유형

4-1. 다음을 계산하여라.

(1) $(7-2i)-\overline{i-5}$

(2) $(13+4i)-\overline{2-7i}+2i$

대표유형 복소수의 곱셈

5. 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b 의 값을 구하시오.

$\overline{(1-2i)}(a+bi)=7+4i$

쌍둥이유형

5-1. 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b 의 값을 구하시오.

$(2+i)\overline{(a-bi)}=5(1-i)$

대표유형 복소수의 나눗셈

6. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

6-1. $x=\dfrac{7}{2-\sqrt{3}i}$, $y=\dfrac{7}{2+\sqrt{3}i}$ 일 때, $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$의 값을 구하시오.

대표유형 음수의 제곱근

7. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

7-1. $\sqrt{-3}\sqrt{12}+\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$를 계산하시오.

대표유형 음수의 제곱근의 성질

8. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 일 때, 다음 중 $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}$와 같은 것은?

① $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ② $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ ③ $\sqrt{-\frac{a}{b}}$

④ $-\sqrt{-\frac{a}{b}}$ ⑤ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

쌍둥이유형

8-1. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{ab^2}=-b\sqrt{a}$ ③ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

수학 멀리뛰기

2-2 이차방정식의 판별식, 근과 계수와의 관계

1. 이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 에서

$b^2-4ac\geq 0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 실수, $b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 허수이므로

계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 근을 갖는다.

(1) 실근: 실수인 근

(2) 허근: 허수인 근

Tip. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 허근을 가질 때, 두 근은 서로 켤레복소수이다.

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지 말하시오.

(1) $x^2-3x+6=0$ (2) $4x^2+x-1=0$

(3) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 b^2-4ac의 값에 따라 판별할 수 있다.
이때, b^2-4ac를 이차방정식의 판별식이라 하고, 기호 D로 나타낸다.

(4) 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때		
(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.	(2) $D=0$이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.	(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(5) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$일 때, 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 허근을 가지면 각각 $D>0$, $D=0$, $D<0$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인2〉 이차방정식의 근을 판별하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

(1) $x^2+5x+7=0$

$D=\square^2-4\times\square\times\square=\square$

$D\square 0$ 이므로

이 방정식은 $\square$ 을 갖는다.

(2) $2x^2+x-6=0$

$D=\square^2-4\times\square\times\square=\square$

$D\square 0$ 이므로

이 방정식은 $\square$ 을 갖는다.

(6) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가질 조건은 $D=b^2-4ac\geq 0$이다.

(7) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$이므로 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$를 이용하여 근을 판별할 수도 있다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 이차방정식의 근을 판별하시오. □ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

(1) $x^2-2x+3=0$

$\frac{D}{4}=\square^2-\square\times\square=\square$

$\frac{D}{4}\square 0$ 이므로

이 방정식은 $\square$ 을 갖는다.

(2) $4x^2+4x+1=0$

$\frac{D}{4}=\square^2-\square\times\square=\square$

$\frac{D}{4}\square 0$ 이므로

이 방정식은 $\square$ 을 갖는다.

확인4〉 이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

(1) 서로 다른 두 실근

$D=\square^2-4\times\square\times\square$

$=\square^2-4k-\square$

$=\square-4k$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$\square-4k>0,\ k<\square$

(2) 중근

중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\square - 4k = 0,\ k = \square$

(3) 서로 다른 두 허근

서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$\square - 4k < 0,\ k > \square$

2. 이차방정식의 근과 계수의 관계

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을

$\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$로 놓으면 두 근의 합과 곱은 다음과 같다.

$$\alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 각각 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

(1) $x^2-6x+4=0$

$\alpha+\beta = -\dfrac{\square}{\square} = \square$

$\alpha\beta = \dfrac{\square}{\square} = \square$

(2) $-3x^2+x-7=0$

$\alpha+\beta = -\dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

$\alpha\beta = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

확인6〉 이차방정식 $3x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 식의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

풀이) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{\square}{\square}=\square$, $\alpha\beta=\frac{\square}{\square}$

$\alpha^2+\beta^2=(\square+\square)^2-2\alpha\beta=\square^2-2\times\frac{\square}{\square}=-\frac{\square}{\square}$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$\frac{\square}{\alpha\beta}=1\div\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

(3) 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$으로 나타낼 수 있다. 이때 이 식의 좌변을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$\alpha+\beta$: 두 근의 합, $\alpha\beta$: 두 근의 곱

(4) 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 두 근의 합이 4이고, 두 근의 곱이 -7일 때 a, b의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

$x^2+ax+b=0$ 에서 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=\square$, $\alpha\beta=\square$ 이므로

$a=-(\alpha+\beta)=\square$, $b=\alpha\beta=\square$

확인8〉 다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하는 과정이다.
□ 안에 알맞은 것을 넣으시오.

(1) $-3, 5$

$\alpha+\beta=\square$

$\alpha\beta=\square$ 이므로

두 수 -3과 5를 근으로 하고

x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\square-\square=0$

(2) $2+i, 2-i$

$\alpha+\beta=\square$

$\alpha\beta=\square$ 이므로

두 수 $2+i$과 $2-i$를 근으로 하고

x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\square+\square=0$

(3) $-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}$

$\alpha+\beta=\square$

$\alpha\beta=\square$ 이므로

두 수 $-1+\sqrt{3}$과 $-1-\sqrt{3}$를 근으로 하고

x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+\square-\square=0$

대표유형 이차방정식의 판별식 [1]

1. 이차방정식 $x^2-6x+1-5k=0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{8}{5}$ ③ $-\frac{4}{5}$

④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

쌍둥이유형

1-1. 이차방정식 $x^2+3x-k=0$이 서로 다른 허근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하시오.

대표유형 이차방정식의 판별식 [2]

2. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-3=0$의 근을 판별하시오. (단, k는 실수이다.)

쌍둥이유형

2-1. x에 대한 이차방정식 $4x^2+4kx+k^2+1=0$의 근을 판별하시오. (단, k는 실수이다.)

대표유형 이차방정식의 근과 계수의 관계

3. 이차방정식 $3x^2-x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)$ (2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

쌍둥이유형

3-1. 이차방정식 $2x^2+3x-1=0$의 두 근을 α, β 라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)$ (2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

대표유형 두 수를 근으로 하는 이차방정식 구하기

4. 이차방정식 $4x^2-x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

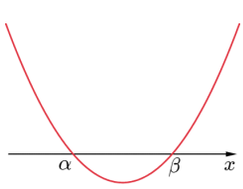
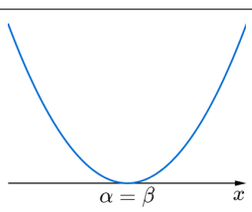
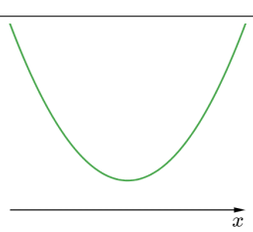
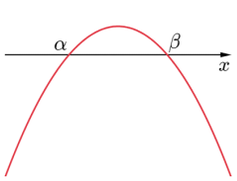
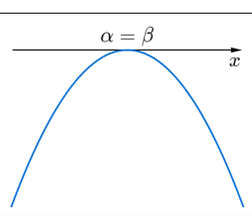
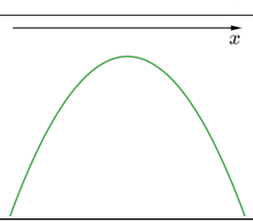
수학 멀리뛰기

2-3 이차방정식과 이차함수

1. 이차방정식과 이차함수의 관계

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만날 때, 그 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 실근의 개수는 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 결정된다.

(2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D		$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근		서로 다른 두 실근 α,β	중근 $\alpha=\beta$	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계		서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$의 그래프	$a>0$			
	$a<0$			

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 빈칸에 알맞은 것을 쓰고 괄호에 알맞은 것을 골라 이차함수 $y=x^2-3x-1$의 그래프와 x축의 위치 관계를 판단하시오.

이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 판별식 D가

$D=\square^2-4\times\square\times\square=\square$ 이므로 D $\square$ 0이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-3x-1$의 그래프는 x축과

(서로 다른 두 점에서 만난다. / 한 점에서 만난다. / 만나지 않는다.)

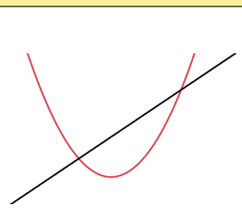
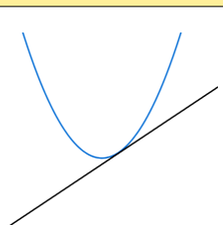
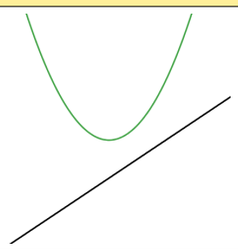
2. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 만날 때, 그 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ … ㉠

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 만나는 점의 개수는 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 이차방정식 ㉠의 판별식 D의 값의 부호에 따라 결정된다.

(2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계

$ax^2+bx+c=mx+n$의 판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계			
	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

〈스스로 확인하기〉

확인2〉 빈칸에 알맞은 것을 쓰고 괄호에 알맞은 것을 골라 이차함수 $y=2x^2+x+1$의 그래프와 직선 $y=2x-4$의 위치 관계를 판단하시오.

이차방정식 $2x^2+x+1=2x-4$, 즉 [ ] 의 판별식 D가

$D=$[ ]$^2-4\times$[ ]$\times$[ ]$=$[ ] 이므로 D[ ] 0이다.

따라서 이차함수 $y=2x^2+x+1$의 그래프는 직선 $y=2x-4$와

(서로 다른 두 점에서 만난다. / 한 점에서 만난다. / 만나지 않는다.)

확인3〉 이차함수 $y=-x^2+3$의 그래프와 직선 $y=-3x+1$의 위치 관계를 판단하시오.

3. 이차함수의 최대, 최소

(1) 어떤 함수의 모든 함숫값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

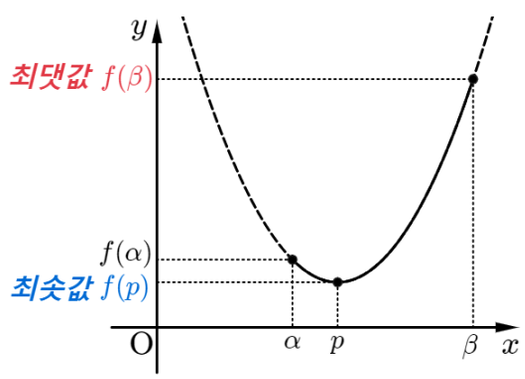
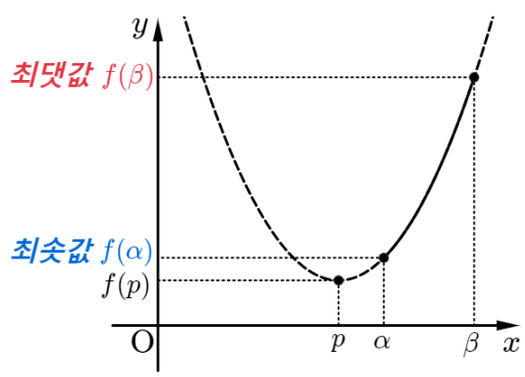
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 구할 수 있다. 실수 전체의 범위에서 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.

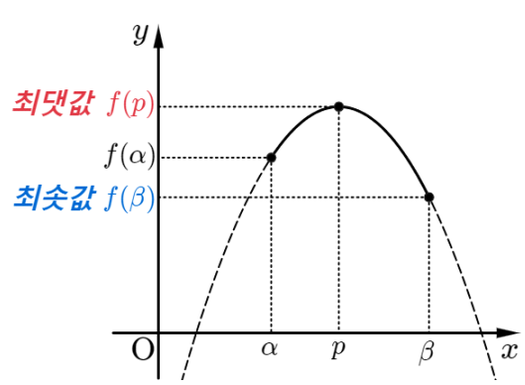
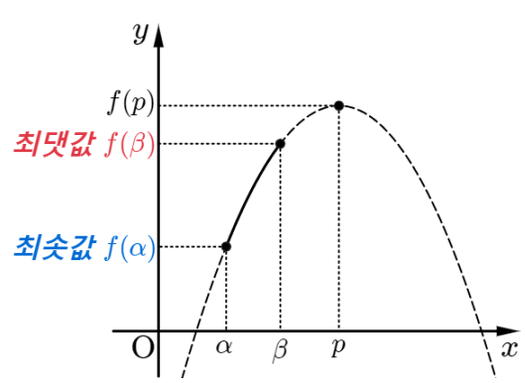
② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.

(2) 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값

① x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a>0)$의 최댓값과 최솟값

$\alpha \le p \le \beta$	$p<\alpha$ 또는 $p>\beta$
	
최댓값: $f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값 최솟값: $f(p)$	최댓값: $f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값 최솟값: $f(\alpha), f(\beta)$ 중 작은 값

② x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a<0)$의 최댓값과 최솟값

$\alpha \le p \le \beta$	$p<\alpha$ 또는 $p>\beta$
	
최댓값: $f(p)$ 최솟값: $f(\alpha), f(\beta)$ 중 작은 값	최댓값: $f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값 최솟값: $f(\alpha), f(\beta)$ 중 작은 값

③ x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$

의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 p가 주어진 x의 값의 범위에 속하는지 조사하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) $\alpha \le p \le \beta$이면 $f(\alpha), f(p), f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.

(ii) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha), f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고 작은 값이 최솟값이다.

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 빈칸에 알맞은 것을 쓰고 괄호에 알맞은 것을 골라 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-4x+1$

$y=x^2-4x+1=(x^2-4x+\square)+\square=(x-\square)^2+\square$

이므로 (최댓값 / 최솟값)은 $\square$ 이다.

(2) $y=-3x^2+6x$

$y=-3x^2+6x=-3(x^2-2x+\square)+\square=-3(x-\square)^2+\square$

므로 (최댓값 / 최솟값)은 $\square$ 이다.

확인5〉 빈칸에 알맞은 것을 쓰고 괄호에 알맞은 것을 골라 주어진 x의 값의 범위에서 이차함수 $y=x^2+6x+2$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

(1) $-4 \le x \le 0$

$y=x^2+6x+2=(x+\square)^2+\square$ 이므로 꼭짓점의 x좌표 $\square$은

주어진 범위 $-4 \le x \le 0$에 (속한다. / 속하지 않는다.)

$x=\square$ 일 때 $y=\square$, $x=\square$ 일 때 $y=\square$, $x=\square$ 일 때 $y=\square$

이므로 구하는 최댓값은 $\square$, 최솟값은 $\square$ 이다.

(2) $-1 \le x \le 2$

$y=x^2+6x+2=(x+\square)^2+\square$ 이므로 꼭짓점의 x좌표 $\square$은

주어진 범위 $-1 \le x \le 2$에 (속한다. / 속하지 않는다.)

$x=\square$ 일 때 $y=\square$, $x=\square$ 일 때 $y=\square$

이므로 구하는 최댓값은 $\square$, 최솟값은 $\square$ 이다.

대표유형 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

1. 이차함수 $y=-x^2-2x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 이차함수 $y=2x^2-3x-k$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

대표유형 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

2. 이차함수 $y=x^2-4x$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 이차함수 $y=3x^2-ax+4$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

대표유형 이차함수의 최댓값과 최솟값

3. 이차함수 $y=x^2-4x+k$의 최솟값이 -1일 때, 실수 k의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

3-1. 이차함수 $y=-2x^2+16x+3k+1$의 최댓값이 5일 때, 실수 k의 값을 구하시오.

대표유형 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값

4. $0 \le x \le 3$에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + k$의 최솟값은 3이다. 주어진 x의 값의 범위에서 이 이차함수의 최댓값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

쌍둥이유형

4-1. $-2 \le x \le 2$에서 이차함수 $y = -x^2 - 6x + k$의 최댓값은 2이다. 주어진 x의 값의 범위에서 이 이차함수의 최솟값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

수학 멀리뛰기

2-4 여러 가지 방정식

1. 고차방정식

(1) 고차방정식이란 삼차 이상의 방정식을 말한다.

예) $x^3+x^2+2x+1=0$, $x^4+4x^3+3x^2+x-5=0$ 등

(2) 다항식 $P(x)$가 x에 대한 삼차식, 사차식일 때 방정식 $P(x)=0$을 각각 x에 대한 삼차방정식, 사차방정식이라고 한다.

2. 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

(1) 인수분해 공식 이용: 인수분해 공식을 이용하여 다항식 $P(x)$를 인수분해한 후 근을 구한다.

예) 삼차방정식 $x^3+3x^2-10x=0$ 을 푸시오.	예) 사차방정식 $x^4-9x^2=0$ 을 푸시오.
풀이)	풀이)
좌변을 인수분해하면 $x(x^2+3x-10)=0$	좌변을 인수분해하면 $x^2(x^2-9)=0$
$x(x-2)(x+5)=0$	$x^2(x-3)(x+3)=0$
따라서 해는 $x=0$ 또는 2 또는 -5	따라서 해는 $x=0$(중근) 또는 3 또는 -3

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 삼차방정식 $x^3+4x^2+3x=0$ 을 푸시오.

풀이)

$x(x^2+4x+3)=0$

$x(\square)(\square)=0$

$x=0$ 또는 $\square$ 또는 $\square$

확인2〉 사차방정식 $x^4-27x=0$ 을 푸시오.

풀이)

$x(\square)=0$

$x(\square)(\square)=0$

$x=0$ 또는 $\square$ 또는 $\square$

(2) 인수정리 이용: 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$임을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한 후 근을 구한다.

예) $x^3+3x^2-7x+3=0$ 을 푸시오.	예) $x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$ 을 푸시오.
풀이) $P(x)=x^3+3x^2-7x+3$이라고 하면 $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다. 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 $P(x)=(x-1)(x^2+4x-3)$ 따라서 방정식은 $(x-1)(x^2+4x-3)=0$ 이므로 구하는 해는 $x=1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{7}$	풀이) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-x-10$이라고 하면 $P(-1)=0,\ P(2)=0$이므로 $x+1,\ x-2$는 $P(x)$의 인수이다. 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 $P(x)=(x-1)(x-2)(x^2-2x+5)$ 따라서 방정식 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$ 이므로 구하는 해는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm2i$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 $x^3-5x^2+3x+1=0$ 을 푸시오.

풀이)

$P(x)=x^3-5x^2+3x+1$이라고 하면

$P(1)=0$이므로 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(\quad\quad)(x^2-4x-1)=0$

따라서 방정식의 해는 $\square$ 또는 $\square$

확인4〉 $2x^4+x^3-5x^2-x+3=0$ 을 푸시오.

풀이)

$P(x)=2x^4+x^3-5x^2-x+3$이라고 하면

$P(1)=0,\ P(-1)=0$이므로 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(\quad\quad)(\quad\quad)^2(2x+3)=0$

따라서 방정식의 해는 $\square$ 또는 $\square$(중근) 또는 $x=-\frac{3}{2}$

(3) 치환 이용: 방정식에 공통부분이 있으면 공통부분을 한 문자로 치환하여 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해하여 근을 구한다.

예) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$ 을 푸시오.

풀이)

$x^2-2x=X$로 놓으면 $X^2-2X-3=0$이고 좌변을 인수분해하면 $(x+1)(x-3)=0$

$X=-1$ 또는 $X=3$, 즉 x^2-2x 또는 $x^2-2x=3$

따라서 방정식의 해는 $x=1$(중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 $(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0$ 을 푸시오.

풀이)

□ $=X$로 놓으면 $X^2-3X+2=0$이고 좌변을 인수분해하면 (□)(□) $=0$

□ 또는 □, 즉 □ $=1$ 또는 □ $=2$

따라서 방정식의 해는 □ 또는 □ 또는 □

3. 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음 성질이 성립한다. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

(1) $\omega^3=1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$

(3) $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

※ ω는 그리스 문자로 오메가(omega)라 읽는다.

예) 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 위의 성질이 성립함을 보이시오.

풀이)

$x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로

근과 계수와의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

〈스스로 확인하기〉

확인6〉 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

풀이)

(1) $\omega^3+\omega^2+\omega=$ $\square$ $+\omega^2+\omega=$ $\square$

(2) $\dfrac{\omega^2}{1+w}+\dfrac{\omega}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega^2}{\square}+\dfrac{\omega}{\square}=\square$

4. 미지수가 2개인 연립이차방정식

(1) 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 미지수가 2개인 연립이차방정식이라고 한다.

예) $\begin{cases}x-y=10\\x^2-y^2=16\end{cases}$ 와 $\begin{cases}x^2+2xy-3y^2=0\\x^2+xy-6=0\end{cases}$ 등

(2) 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

일차방정식을 한 미지수에 대하여 정리한 것을 이차방정식에 대입하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 만들어 푼다.

예) 연립방정식 $\begin{cases}x+y=7 & \cdots\cdots①\\x^2+y^2=25 & \cdots\cdots②\end{cases}$ 을 푸시오.

풀이)

①에서 $y=7-x$ …… ③

③에서 ②를 대입하면 $x^2+(7-x)^2=25,\ x^2-7x+12=0$

이 방정식을 풀면 $x=3$ 또는 $x=4$

이것을 각각 ③에 대입하면 $x=3$일 때 $y=4$, $x=4$일 때, $y=3$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 연립방정식 $\begin{cases}x-y=2\\x^2+xy-y^2=11\end{cases}$ 를 푸시오.

풀이)

$x=y+2$를 $x^2+xy-y^2=11$에 대입하여 풀면 $\square$ 또는 $\square$

따라서 연립방정식의 해는 $\square$ 또는 $\square$

(3) 두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

한 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해한 후 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 만들어 푼다.

예) 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots② \end{cases}$ 을 푸시오.

풀이)

①의 좌변을 인수분해하면 $(x-2y)(x+y)=0$. 따라서 $x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ②에 대입하면 $(-y)^2+(-y)\times y+y^2=7$, $y^2=7$

이 방정식을 풀면 $y=\pm\sqrt{7}$. 따라서 $y=\sqrt{7}$일 때, $x=-\sqrt{7}$, $y=-\sqrt{7}$일 때 $x=\sqrt{7}$

(ii) $x=2y$를 ②에 대입하면 $(2y)^2+(2y)\times y+y^2=7$, $y^2=1$

이 방정식을 풀면 $y=\pm 1$. 따라서 $y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

〈스스로 확인하기〉

확인8〉 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots② \end{cases}$ 을 푸시오.

풀이)

$2x^2-5xy+2y^2=0$의 좌변을 인수분해하면 (□)(□)$=0$, 즉 $x=2y$ 또는 $x=\frac{y}{2}$

(i) $x=2y$를 $x^2+y^2=5$에 대입하여 풀면 □이므로 $y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$

(ii) □를 $x^2+y^2=5$에 대입하여 풀면 □이므로 $y=2$일 때 $x=1$, $y=-2$일 때 $x=-1$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 □ 또는 □ 또는 □ 또는 □

대표유형 삼차방정식

1. 방정식 $x^3+8=0$을 푸시오.

쌍둥이유형

1-1. 방정식 $x^3+3x^2-10x=0$을 푸시오.

대표유형 사차방정식

2. 방정식을 $x^4+5x^3+2x^2-5x-3=0$을 푸시오.

쌍둥이유형

2-1. 방정식 $x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$을 푸시오.

대표유형 삼차방정식과 사차방정식

3. 방정식 $x^4+2x^2-8=0$을 푸시오.

쌍둥이유형

3-1. 방정식 $(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-20=0$을 푸시오.

대표유형 삼차방정식과 사차방정식

4. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $\omega^2+\omega^4$의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^9$의 값을 구하시오.

대표유형 삼차방정식과 사차방정식

5. 삼차방정식 $x^3-8=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, $\omega+\frac{4}{\omega}$의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

5-1. 삼차방정식 $x^3-8=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, $\frac{\omega^4}{8}+\frac{4}{\omega}$의 값을 구하시오.

대표유형 삼차방정식과 사차방정식

6. 삼차방정식 $x^3+2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2일 때, 나머지 한 근과 실수 a, b의 값의 합을 각각 구하시오.

쌍둥이유형

6-1. 사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$의 두 실근을 a, b, 두 허근을 c, d라고 할 때, $a+b+c^2+d^2$의 값을 구하시오.

대표유형 삼차방정식과 사차방정식

7. 정육면체의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $3\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{cm}$ 늘이고, 높이를 $2\,\mathrm{cm}$ 줄였더니 부피가 $24\,\mathrm{cm}^3$가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하시오.

쌍둥이유형

7-1. 정육면체의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{cm}$ 늘이고, 높이를 $4\,\mathrm{cm}$ 줄였더니 부피가 $243\,\mathrm{cm}^3$가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하시오.

대표유형 연립이차방정식

8. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$ 을 푸시오.

쌍둥이유형

8-1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+3xy-y^2=63 \end{cases}$ 을 푸시오.

대표유형 연립이차방정식

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2-xy+2y^2=8 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 최댓값을 구하시오.

쌍둥이유형

9-1. 연립방정식 $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 모두 구하시오.

대표유형 연립이차방정식

10. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 $12\,\mathrm{cm}$이고, 빗변의 길이가 $2\sqrt{26}\,\mathrm{cm}$인 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 구하시오.

쌍둥이유형

10-1. 다음 조건을 모두 만족시키는 두 자리의 자연수를 모두 구하시오.

○ 각 자리의 숫자의 합은 4이다. ○ 각 자리의 숫자의 제곱의 합은 각 자리의 숫자의 곱보다 7만큼 크다.

수학 멀리뛰기

2-5

일차부등식

1. 일차부등식

(1) 일차부등식: 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때,

$$(\text{일차식})<0,\ (\text{일차식})>0,\ (\text{일차식})\le 0,\ (\text{일차식})\ge 0$$

중 어느 하나의 꼴로 나타낼 수 있는 부등식

(2) 일차부등식의 해: 일차부등식을 참이 되게 하는 미지수의 값

(3) 부등식의 성질

① 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$a<b\text{이면 } a+c<b+c,\ a-c<b-c$$

② 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$a<b,\ c>0\text{이면 } ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$$

③ 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향은 바뀐다.

$$a<b,\ c<0\text{이면 } ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

(4) 일차부등식의 풀이

① 계수가 소수 또는 분수인 경우에는 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 바꾼다.

② 괄호가 있으면 괄호를 풀고 정리한다.

③ 일차항(미지수 x를 포함한 항)은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항한다.

④ 양변을 정리하여 다음 중 어느 하나의 꼴로 바꾼다.

$$ax<b,\ ax>b,\ ax\le b,\ ax\ge b(a\ne 0)$$

⑤ 양변을 x의 계수 a로 나눈다. 이때 a가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

〈스스로 확인하기〉

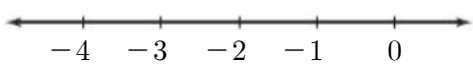
확인1〉 다음은 일차부등식 $0.3(x-2)>0.5x-0.2$를 푸는 과정이다.
빈칸에 알맞은 것을 써넣고, 그 해를 수직선 위에 나타내어 보자.

양변에 10을 곱한 후 괄호를 풀면 $\square x-6$ ◯ $5x-2$

-6과 $5x$를 이항한 후 양변을 정리하면 $\square x$ ◯ $\square$

양변을 $\square$로 나누면 x ◯ $\square$

이 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



2. 연립일차부등식

(1) 연립부등식: 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어 나타낸 것

(2) 연립일차부등식: 일차부등식으로만 이루어진 연립부등식

(3) 연립부등식의 해: 두 개 이상의 부등식의 공통인 해

(4) 연립부등식을 푼다: 연립부등식의 해를 모두 구하는 것

3. 연립부등식의 풀이

(1) 연립부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구하고, 이들을 한 수직선에 나타내어 그 공통부분을 찾는다.

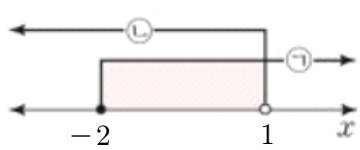
예) 연립방정식 $\begin{cases} -x+2 \le 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 푸시오.

풀이)

㉠을 풀면 $-x \le 2,\ x \ge -2$

㉡을 풀면 $2x<2,\ x<1$

㉠과 ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 $-2 \le x<1$

(2) 연립부등식에서 두 부등식의 공통인 해가 없으면 그 연립부등식의 해는 없다고 한다.

예) 연립방정식 $\begin{cases} 4x+6 \le 10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3 \ge 7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 푸시오.

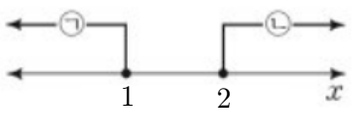
풀이)

㉠을 풀면 $4x \le 4,\ x \le 1$

㉡을 풀면 $2x \ge 4,\ x \ge 2$

㉠과 ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 연립부등식의 해는 없다.



(3) 공통인 해가 한 개인 경우는 그 연립부등식의 해를 등호를 사용하여 나타낸다.

예) 연립방정식 $\begin{cases} 3x-2 \ge 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+5 \le 9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 푸시오.

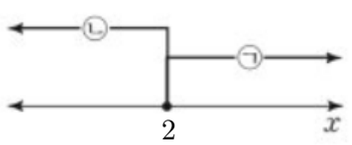
풀이)

㉠을 풀면 $3x \ge 6,\ x \ge 2$

㉡을 풀면 $2x \le 4,\ x \le 2$

㉠과 ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 연립부등식의 해는 $x=2$



(4) 연립부등식 $A<B<C$는 두 부등식 $A<B,\ B<C$를 하나로 나타낸 것이므로

연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 의 꼴로 고쳐서 푼다.

예) 연립부등식 $x-1<3x+5<2x+7$를 푸시오.

풀이)

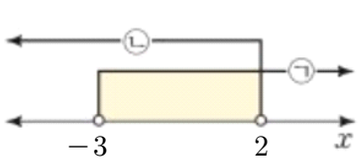
주어진 연립부등식은 $\begin{cases} x-1<3x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5<2x+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

부등식 ㉠을 풀면 $-2x<6,\ x>-3$

부등식 ㉡을 풀면 $x<2$

㉠과 ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 연립부등식의 해는 $-3<x<2$



〈스스로 확인하기〉

확인2〉 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x-1>5 \\ -2x+7 \geq 1 \end{cases}$

(2) $2x+2<x<3x-2$

4. 절댓값을 포함한 일차부등식의 풀이

(1) 일반적으로 $a>0$이면 절댓값의 성질에 따라

$|x|<a$일 때, $-a<x<a$

$|x|>a$일 때, $x<-a$ 또는 $x>a$

가 성립한다.

이 성질을 이용하면 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

예) 부등식 $|x-1| \leq 2$를 푸시오.

풀이)

$|x-1| \leq 2$에서 $-2 \leq x-1 \leq 2$

$-2 \leq x-1$에서 $x \geq -1$ …… ㉠

$x-1 \leq 2$에서 $x \leq 3$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 3$

(2) 절댓값을 포함한 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 기준으로 범위를 나누어 절댓값 기호를 포함하지 않는 식으로 고쳐서 풀 수 있다.

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x \geq a) \\ -(x-a) & (x<a) \end{cases}$$

예) 부등식 $|x|+|x-2| \le 6$를 푸시오.

풀이)

$x<0,\ 0 \le x<2,\ x \ge 2$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<0$일 때

$|x|=-x,\ |x-2|=-(x-2)$이므로 $-x-(x-2) \le 6,\ -2x+2 \le 6,\ x \ge -2$

그런데 $x<0$이므로 $-2 \le x<0$ …… ㉠

(ii) $0 \le x<2$일 때

$|x|=x,\ |x-2|=-(x-2)$이므로 $x-(x-2) \le 6,\ 2 \le 6$

따라서 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다.

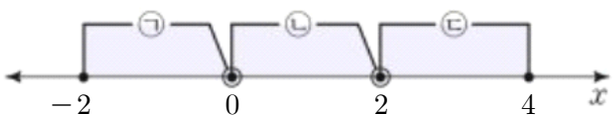
즉, $0 \le x<2$ …… ㉡

(iii) $x \ge 2$일 때

$|x|=x,\ |x-2|=x-2$이므로 $x+(x-2) \le 6,\ 2x-2 \le 6,\ x \le 4$

그런데 $x \ge 2$이므로 $2 \le x \le 4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-2 \le x \le 4$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 부등식을 푸시오.

(1) $|x-3| \ge 1$

(2) $|x+1|+|x-3| \le 12$

대표유형 연립일차부등식(1)

1. 연립부등식 $\begin{cases} x+2>0 \\ 4x+5 \le 9 \end{cases}$ 을 푸시오.

쌍둥이유형

1-1. 연립부등식 $\begin{cases} 5x+1<3x-5 \\ 2x+3>7 \end{cases}$ 을 푸시오

대표유형 연립일차부등식(2)

2. 연립부등식 $x-1<2x+3<6-x$를 푸시오.

쌍둥이유형

2-1. 연립부등식 $2x-3 \leq x+2 \leq 3x-10$을 푸시오.

대표유형 절댓값을 포함한 일차부등식(1)

3. 부등식 $|3x-3|<6$을 푸시오.

쌍둥이유형

3-1. 부등식 $|2-4x|>6$을 푸시오.

대표유형 절댓값을 포함한 일차부등식(2)

4. 부등식 $|x+1|+|x-1| \leq 6$을 푸시오.

쌍둥이유형

4-1. 부등식 $|x+1|+|x-2| \geq 7$을 푸시오.

수학 멀리뛰기

2-6 이차부등식

1. 이차부등식

(1) 이차부등식: 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하였을 때,
$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0 (a\neq 0)$와 같이
좌변이 x에 대한 이차식인 부등식
예) $2x^2+2x-4>0$, $x^2<5x+7$, $3x+1\geq -4x^2$, $3x^2+2x+3\leq 2x^2-4x-2$

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 주어진 식이 이차부등식이면 ○, 이차부등식이 아니면 × 하시오.

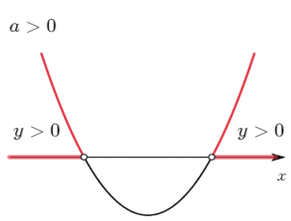
(1) $6x^2+13x+11=0$ ( )

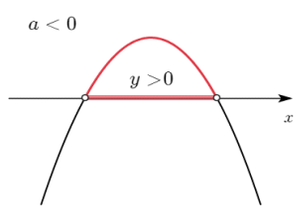
(2) $x^2+5x-6>3x^2+7x+5$ ( )

(3) $2x^2+4\leq 3x^3+5x$ ( )

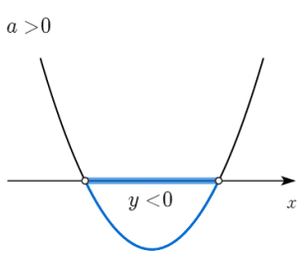
2. 이차부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이의 관계

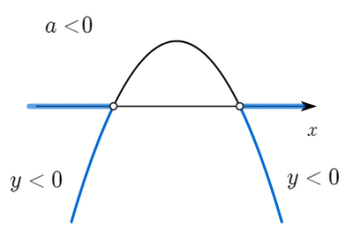
(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 x의 값의 범위이다.
즉, $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.





(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$인 x의 값의 범위이다.
즉, $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.



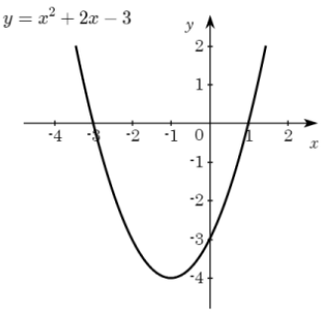


Tip. 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$와 $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 부분을 포함하여 생각한다.

〈스스로 확인하기〉

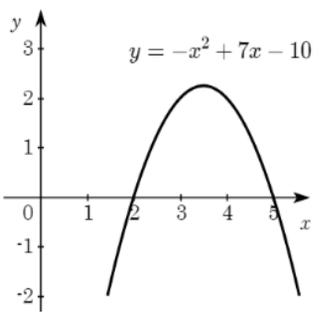
확인2〉 주어진 그래프를 이용하여 이차부등식의 해를 구하시오.

(1) $x^2+2x-3>0$



$x^2+2x-3>0$의 해는 그래프의 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x<$ ☐ 또는 $x>$ ☐ 이다.

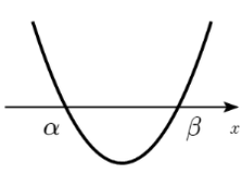
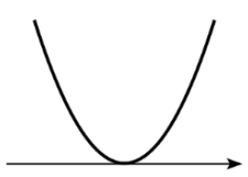
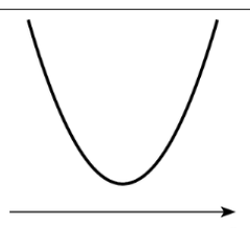
(2) $-x^2+7x-10\geq 0$



$-x^2+7x-10\geq 0$의 해는 그래프의 x축보다 위쪽에 있는 부분과 x축과 만나는 부분을 포함하는 x의 값의 범위이므로 ☐ 이다.

3. 이차부등식의 풀이

계수가 실수인 이차부등식의 해는 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 구할 수 있다. 일반적으로 $a>0$일 때. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 하면 D 의 값의 부호에 따라 이차부등식의 해는 다음과 같다.

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프$(a>0)$			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq 0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq 0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

※ α, β는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해이다.

Tip. $a<0$인 경우에는 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하여 이차항의 계수가 양수인 부등식으로 바꾸어 푼다. 이때 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

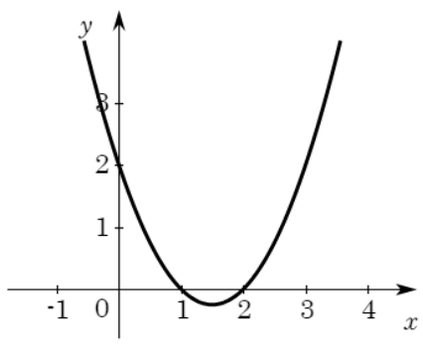
예) 이차부등식 $x^2-3x+2>0$을 푸시오.

이차함수 $y=x^2-3x+2$에서

$$y=x^2-3x+2$$
$$=(x-1)(x-2)$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 x축과 두 점 $(1,0)$, $(2,0)$에서 만난다.

구하는 이차부등식의 해는 그래프에서 $y>0$인 x의 값의 범위이므로 $x<1$ 또는 $x>2$이다.



〈스스로 확인하기〉

확인3〉 이차부등식을 푸는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 쓰고 그래프를 그리시오.

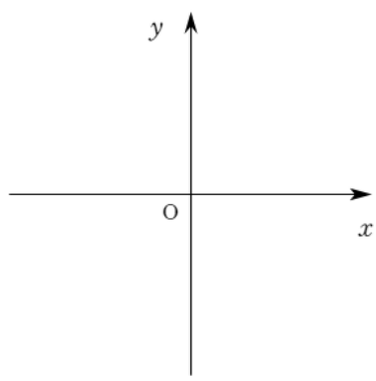
(1) $x^2-x-2\geq 0$

이차함수 $y=x^2-x-2$에서

$$y=x^2-x-2$$
$$=\boxed{\qquad\qquad}$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 x축과 두 점 $(\boxed{\quad})$, $(\boxed{\quad})$에서 만난다.

구하는 이차부등식의 해는 그래프에서 $y\geq 0$인 x의 값의 범위이므로 $\boxed{\quad}$ 또는 $\boxed{\quad}$이다.



(2) $-x^2+4x\geq 0$

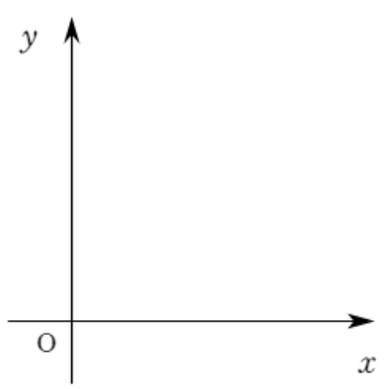
부등식의 양변에 -1을 곱하면 $\boxed{\qquad\qquad}$

이차함수 $y=x^2-4x$에서

$$y=x^2-4x$$
$$=\boxed{\qquad\qquad}$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 x축과 두 점 $(\boxed{\quad})$, $(\boxed{\quad})$에서 만난다.

구하는 이차부등식의 해는 그래프에서 $y\boxed{\quad}0$인 x의 값의 범위이므로 $\boxed{\qquad\qquad}$이다.



4. 연립이차부등식의 풀이

(1) 연립이차부등식: 연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 연립이차부등식이라 한다.

(2) 연립이차부등식의 풀이

연립이차부등식을 풀 때는 연립일차부등식을 풀 때와 마찬가지로 각 부등식의 공통인 해를 구한다.

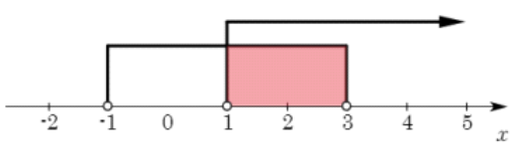
예) 연립방정식 $\begin{cases} 3x+4>2x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x-3<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 푸시오.

풀이)

㉠을 풀면 $3x-2x>5-4,\ x>1$

㉡을 풀면 $(x-3)(x+1)<0,\ -1<x<3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면



이므로 $1<x<3$ 이다.

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 연립이차부등식을 푸는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 쓰고 수직선을 이용하여 해를 구하시오.

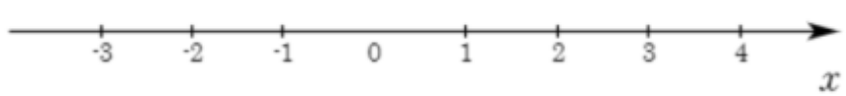
(1) $\begin{cases} -x-5\le -7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-6>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 풀면 $-x\le -7+5 \ \Rightarrow\ -x\le -2 \ \Rightarrow\ x$ □ 2

㉡을 풀면 $x^2-x-6>0 \ \Rightarrow\ ($□$)($□$)>0$

$x<$ □ 또는 $x>$ □

수직선을 이용하여 공통인 범위를 구하면 □ 이다.



(2) $\begin{cases} x^2-4 \le 0 & \cdots\cdots㉠ \\ x^2-x>0 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$

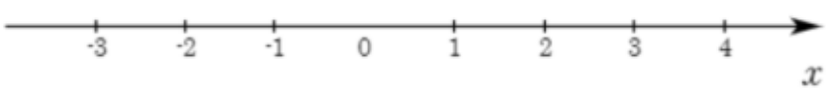
㉠을 풀면 $x^2-4 \le 0 \Rightarrow (\square)(\square) \le 0$

$\square \le x \le \square$

㉡을 풀면 $x^2-x>0 \Rightarrow (\square)(\square) > 0$

$x < \square$ 또는 $x > \square$

수직선을 이용하여 공통인 범위를 구하면 $\square$ 이다.



대표유형 판별식 $D>0$인 이차부등식

1. 이차부등식 $4x-3>-x^2+2x$를 푸시오.

쌍둥이유형

1-1. 이차부등식 $x^2<3x+4$을 푸시오.

대표유형 판별식 $D=0$인 이차부등식

2. 이차부등식 $x^2+6x-2>2x-6$를 푸시오.

쌍둥이유형

2-1. 이차부등식 $x^2+9\le 6x$를 푸시오.

대표유형 판별식 $D<0$인 이차부등식

3. 이차부등식 $2x^2+4x+7>0$을 푸시오.

쌍둥이유형

3-1. 이차부등식 $3x^2+2x+7<2x^2-x-2$를 푸시오.

대표유형 이차부등식의 해의 조건을 만족시키는 계수 구하기

4. 이차부등식 $x^2+kx-2k-3>0$이 모든 실수에 대하여 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 계수가 실수인 이차부등식 $x^2+ax+b\geq 0$의 해가 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

3

경우의 수

3-0 중학교 개념으로 확인하기
3-0 중학교 문제로 다지기
3-1 경우의 수
3-2 순열과 조합

수학 도움닫기
3-0

중학교 개념으로 확인하기

경우의 수_사건과 경우의 수 (중2)

1. **사건**: 같은 조건에서 반복할 수 있는 실험이나 관찰을 통해 얻어지는 결과
2. **경우의 수**: 사건이 일어날 수 있는 가짓수

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 1부터 6까지의 수가 각각 적힌 정육면체의 주사위를 한 번 던질 때, 윗면에 나오는 수에 대하여 일어날 수 있는 사건 3가지를 쓰고, 각 사건에 대한 경우의 수를 구하시오.

사건	경우의 수
예) 짝수가 나온다.	예) 짝수가 나올 경우는 2, 4, 6이므로 경우의 수는 3이다.
①	④
②	⑤
③	⑥

확인2〉 표는 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우를 순서쌍으로 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 표를 완성하고, 모든 경우의 수를 구하시오.

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)				
2	(2, 1)					
3	(3, 1)					
4						
5						
6						(6, 6)

(2) 두 눈의 수가 같은 경우를 표에서 찾고, 그 경우의 수를 구하시오.

(3) 두 눈의 수의 합이 8인 경우를 표에서 찾고, 그 경우의 수를 구하시오.

경우의 수_사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수 (중2)

1. 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수

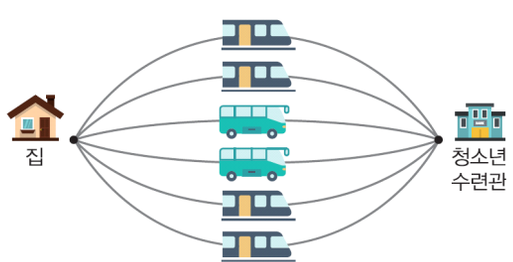
사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때,
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면,
(사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 음료수 자판기는 생수 2종류, 이온 음료 3종류, 과일 음료 4종류를 판매한다. 이 중에서 한 종류를 고를 때, 이온 음료 또는 과일 음료를 고르는 경우의 수를 구하시오.

$3+$ ☐ $=$ ☐

확인4〉 그림과 같이 우영이네 집에서 청소년 수련관까지 가는 방법은 버스로 2가지, 지하철로 4가지가 있다. 이때 우영이네 집에서 청소년 수련관까지 가는 모든 경우의 수를 구하시오.



☐ $+$ ☐ $=$ ☐

확인5〉 미술 동아리 3개, 음악 동아리 4개, 체육 동아리 6개가 있다. 이 중에서 한 개의 동아리에 가입할 때, 음악 동아리 또는 체육 동아리에 가입하는 경우의 수를 구하시오.

확인6〉 이연이네 학교의 이번 달 추천 도서에는 소설책 6권과 위인전 7권이 있다. 이연이가 추천 도서 중에서 한 권을 선택할 때, 소설책 또는 위인전을 선택하는 경우의 수를 구하시오.

경우의 수_사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수 (중2)

1. 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우의 수

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면,

(두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 점심 식사를 하기 위해 햄버거 가게에 갔다. 햄버거 빵에 들어갈 재료는 고기와 모둠 야채를 취향에 맞게 각각 한 종류씩 선택할 수 있다. 고기 2종류, 모둠 야채 3종류 메뉴가 각각 있다고 할 때, 선택할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 고기와 모둠 야채는 반드시 1종류씩 선택해야 한다.)

$2\times\square=\square$

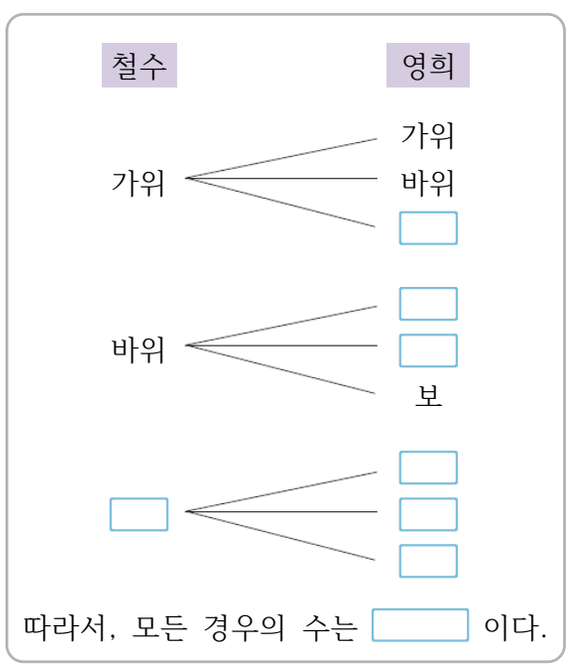
확인8〉 윤아네 집, 서점, 학교 사이의 길을 나타낸 것이다. 윤아가 집에서 학교까지 갈 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 지점은 두 번 이상 지나지 않는다.)



□ × □ = □

확인9〉 철수와 영희가 가위바위보를 한 번 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 빈칸에 알맞은 것을 쓰고, 모든 경우의 수를 구하시오.



(2) 철수가 이기는 경우의 수를 구하시오.

(3) 영희가 이기는 경우의 수를 구하시오.

(4) 두 사람이 비기는 경우의 수를 구하시오.

경우의 수_나만의 실생활 적용 사례 탐구 (중2)

※ 생활 속에서 경우의 수를 적용할 수 있는 나만의 사례를 만들고 문제를 해결해 봅시다.

[도전! 사례 탐구 1] (사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수)$=m+n$

나만의 실생활 적용 사례! 스토리텔링!	문제해결 과정 및 풀이

[도전! 사례 탐구 2] (두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수)$=m\times n$

나만의 실생활 적용 사례! 스토리텔링!	문제해결 과정 및 풀이

수학 도움닫기
3-0

중학교 문제로 다지기

문제 1

1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 3의 배수가 나오는 경우의 수를 구하시오.

(2) 8의 배수가 나오는 경우의 수를 구하시오.

(3) 3의 배수 또는 8의 배수가 나오는 경우의 수를 구하시오.

문제 2

1부터 3까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드 중 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 자리의 자연수를 만들 때, 만들 수 있는 두 자리의 자연수를 모두 서술하고, 그 경우의 수를 구하시오.

문제 3

서울에서 제주도로 여행을 가려고 한다. 서울과 제주도의 교통편으로는 2종류의 항공사와 3종류의 여객선이 있다고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 서울에서 제주도로 가는 이동 수단을 선택할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

(2) 서울에서 제주도를 왕복하는 데 갈 때는 항공편으로, 올 때는 배편을 이용한다면 이동 수단을 선택할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오

문제 4

다음은 학교 체육 대회의 경기 일정이다.

오전	발야구, 피구, 농구, 단체 줄넘기
오후	축구, 씨름, 이어달리기

한 학생이 오전과 오후에 참여할 경기 종목을 각각 한 가지씩 선택할 때, 선택할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

문제 5

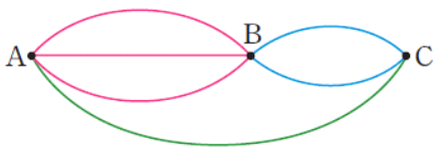
두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈이 수의 차가 1 또는 4가 되는 경우의 수를 구하시오.

문제 6

어떤 방에 A, B, C, D, E의 5개의 문이 있다. 이 방을 들어 갔다가 나올 때, 같은 문을 사용하지 않는 경우의 수를 구하시오.

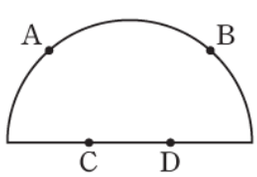
문제 7

그림과 같은 경로를 따라 지점 A에서 지점 C까지 가는 모든 경로의 수를 구하시오.
(단, 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않는다.)



문제 8

그림과 같이 반원 위에 점 4개가 있다. 이 중에서 점 3개를 이어 삼각형을 그리거나 점 4개를 이어 사각형을 그릴 때, 그릴 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

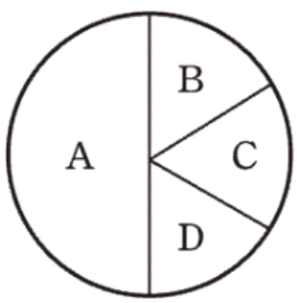


문제 9

서로 다른 종류의 6개의 과일 중에서 2개를 골라 영은이와 철민이에게 각각 한 개씩 주는 방법은 몇 가지인지 구하시오.

문제 10

그림의 A, B, C, D 네 부분에 빨간색, 주황색, 노란색, 초록색의 4가지 색을 한 번씩만 사용하여 색을 칠하려고 한다. 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오.

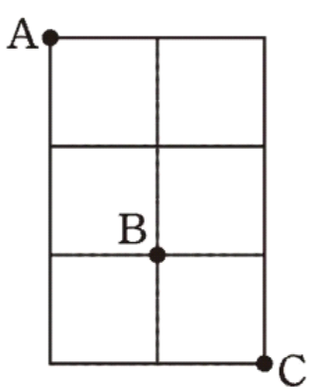


문제 11

한 개의 동전을 세 번 던질 때, 적어도 한 번은 앞면이 나오는 경우의 수를 구하시오.

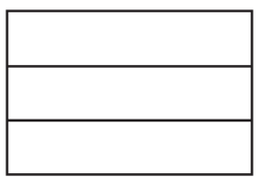
문제 12

그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 B지점을 거쳐 C지점으로 갈 때, 최단 경로로 가는 경우의 수를 구하시오.



문제 13

빨강, 파랑, 노랑의 세 가지 색 중에서 두 가지 이상을 사용하여 다음 그림의 각 영역을 색칠하려고 한다. 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠할 때, 색칠할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있다.)



문제 14

100원짜리, 50원짜리, 10원짜리 동전이 각각 5개씩 있다. 이 동전을 적당히 사용하여 600원을 지불하려고 할 때, 지불하는 방법의 수를 구하시오.

문제 15

상자 A에는 12개의 구슬이 들어 있고 상자 B는 비어 있다. 상자 A에서 1개 이상 11개 이하의 구슬을 상자 B로 옮기려고 한다. 상자 A에 남아 있는 구슬의 수가 상자 B로 옮겨진 구슬의 수의 약수가 되는 경우의 수를 구하시오.

문제 16

숫자 0, 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 두 장을 동시에 뽑아 두 자리의 자연수를 만들 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수를 구하시오.

(2) 만들 수 있는 두 자리의 자연수 중 5의 배수인 경우의 수를 구하시오.

(3) 만들 수 있는 두 자리의 자연수 중 30미만인 경우의 수를 구하시오.

수학 멀리뛰기
3-1

경우의 수

1. 사건과 경우의 수

(1) 사건: 어떤 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과

예) 한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나온다.

예) 100원짜리 동전 1개와 500원짜리 동전 1개를 던져 모두 앞면이 나온다.

(2) 경우의 수: 어떤 사건이 일어날 수 있는 모든 경우의 가짓수

※ 경우의 수를 구할 때에는 모든 경우를 빠짐없이 중복되지 않게 찾아야 한다.

예) 한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나오는 경우의 수는 2, 3, 5가 나오는 경우이므로 3이다.

예) 100원짜리 동전 1개와 500원짜리 동전 1개를 던져 모두 앞면이 나오는 경우의 수는 1이다.

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 1부터 100까지 적힌 카드가 있다. 임의로 카드를 하나 뽑을 때 다음 경우의 수를 구하시오.

(1) 2의 배수가 나오는 경우의 수

_____

(2) 3의 배수가 나오는 경우의 수

_____

2. 합의 법칙과 곱의 법칙

(1) 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 두 사건 A, B가 일어나는 경우가 각각 m, n가지이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우는 $(m+n)$가지이다.

예) 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3 또는 5가 되는 경우의 수를 구해보자

순서쌍을 (A주사위의 눈, B주사위의 눈)이라 할 때
눈의 수의 합이 3인 경우: (1, 2), (2, 1) ➡ 2가지
눈의 수의 합이 5인 경우: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) ➡ 4가지
이때, 눈의 수의 합이 3 또는 5가 되는 경우의 수는 동시에 일어나지 않으므로
$2+4=6$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인2〉 서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수가 되는 경우의 수를 구해보자.

(1) 나오는 눈의 수의 합이 5인 경우를 순서쌍으로 나타내면

_____

(2) 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우를 순서쌍으로 나타내면

_____

따라서 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수가 되는 경우의 수는 ☐ + ☐ = ☐ 이다.

(2) 곱의 법칙

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우가 m가지이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우가 n가지일 때, 두 사건 A, B가 동시에 또는 연속하여 일어나는 경우는 $(m\times n)$가지이다. 곱의 법칙은 동시에 일어나는 세 가지 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

예) 어느 가게에서 체리, 바닐라, 녹차, 망고의 4가지 아이스크림에 딸기, 캐러멜, 초콜릿의 3가지 시럽 중 하나를 선택할 수 있다고 할 때, 이 가게에서 시럽을 뿌린 아이스크림을 판매할 수 있는 경우의 수를 구해보자.

아이스크림 / 시럽	체리	바닐라	녹차	망고
딸기				
캐러멜				
초콜릿				

표와 같이 4가지 맛의 아이스크림에 각각 3가지 시럽을 선택할 수 있으므로 경우의 수는 $4\times3=12$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 자연수 24의 약수의 개수를 구하시오.

(풀이) 24를 소인수분해하면 $24=2^3\times3$ 이므로 표를 만들어 보면

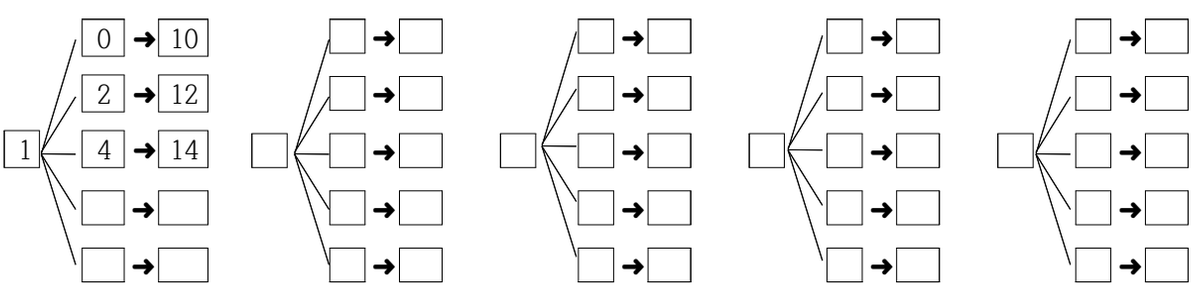
2^3의 약수 / 3의 약수	1	2	2^2	2^3
1	1×1	1×2		
3	3×1			

2^3의 약수의 개수 ☐ 개, 3의 약수의 개수 ☐ 개이므로 24의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의해 ☐ × ☐ = ☐ 개이다.

확인4〉 두 자리 자연수 중에 십의 자리의 수는 홀수이고 일의 자리의 수는 2의 배수인 수는 몇 가지인가?

(풀이)

다음과 같은 그림을 **수형도**라고 한다. 수형도의 빈 칸에 각 자리의 숫자를 쓰고 경우의 수를 구해보자



이와 같은 방법으로 찾을 때 십의 자리에 올 수 있는 수는 ☐ 가지, 일의 자리에 올 수 있는 수는 ☐ 가지이고 두 자리 자연수의 개수는 두 사건이 동시에 일어나는 경우이므로 ☐ × ☐ = ☐ 가지이다.

확인5〉 다음 다항식을 전개하면 생기는 모든 항의 개수를 구하시오.

(1) $(a+b)(x+y+z)$

(2) $(a+b)(m+n)(x+y+z)$

확인6〉 세 자리의 자연수 중에서 백의 자리 숫자는 3의 배수, 십의 자리 숫자는 소수, 일의 자리 숫자는 홀수인 것의 개수를 구하시오.

(풀이)

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 수의 개수는 ☐ 개,

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 수의 개수는 ☐ 개,

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 수의 개수는 ☐ 개이고

이 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의해

☐ × ☐ × ☐ = ☐ 개이다.

대표유형 합의 법칙(주사위 던지기)

1. 서로 다른 주사위 2개를 던져서 나오는 눈의 차가 2 이하인 경우의 수를 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 서로 다른 주사위 2개를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 10 이상인 경우의 수를 구하시오.

대표유형 합의 법칙(자연수의 개수)

2. 20 이하의 자연수 중 3의 배수 또는 7의 배수가 되는 자연수의 개수를 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 30 이하의 자연수 중 5의 배수 또는 7의 배수가 되는 자연수의 개수를 구하시오.

대표유형 합의 법칙

3. 김밥 4종류, 라면 3종류를 파는 분식집에서 한 가지 음식을 주문하는 경우의 수를 구하시오.

쌍둥이유형

3-1. 운동화 4켤레, 구두 3켤레 중 신발을 한 켤레 택하는 경우의 수를 구하시오.

대표유형 곱의 법칙

4. 김밥 4종류, 라면 3종류를 파는 분식집에서 김밥 1종류, 라면 1종류를 동시에 주문하는 경우의 수를 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 티셔츠 5벌, 청바지 4벌 중 티셔츠 1벌과 청바지 1벌을 동시에 고르는 경우의 수를 구하시오.

대표유형 순서쌍의 개수

5. 자연수 x, y가 $3 \le x+2y \le 5$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

쌍둥이유형

5-1. 자연수 x, y가 $3 \le xy \le 5$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

대표유형 약수의 개수

6. $2^3 \times 3^4$의 약수의 개수를 구하시오.

(표를 이용하고 필요하면 칸을 나누어 쓰시오.)



쌍둥이유형

6-1. 180의 약수의 개수를 구하시오.

수학 멀리뛰기
3-2

순열과 조합

1. 순열

(1) 순열: 서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

즉, ${}_n\mathrm{P}_r = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$

예) 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택해서 일렬로 나열하는 경우는 백의 자리에 올 수 있는 수 5가지, 동시에 십의 자리에 올 수 있는 수 4가지, 일의 자리에 올 수 있는 수 3가지이므로 곱의 법칙을 이용해서 $5\times4\times3=60$(가지)이고 이를 순열로 나타내면 ${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$ 와 같이 구할 수도 있다.

(2) 계승: 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 계승이라 하고, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다.

즉 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$이다.

예) $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

(3) 순열의 수

① ${}_n\mathrm{P}_r$을 계승을 사용해서 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{P}_r &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\\
&= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\times(n-r)\times(n-r-1)\times\cdots\times2\times1}{(n-r)\times(n-r-1)\times\cdots\times2\times1}\\
&= \frac{n!}{(n-r)!}\quad(0<r<n)
\end{aligned}
$$

즉, ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}\quad(0<r<n)$

② $r=0$이면 아무것도 나열하지 않는 방법의 수이고 그 수는 1이므로 ${}_n\mathrm{P}_0=1$이다.

또 이를 위의 식에 대입하면 ${}_n\mathrm{P}_0=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$이 되어 성립한다.

③ $0!=1$로 정의하면 $r=n$일 때 ${}_n\mathrm{P}_n=n!=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}$이므로 위 식이 성립한다.

④ 이를 종합하면 ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}\quad(0\le r\le n)$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_n=n!$

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음 순열의 수를 구하시오.

(1) ${}_{10}\mathrm{P}_3 = \square \times \square \times \square = \square$

(2) ${}_4\mathrm{P}_1 \times {}_3\mathrm{P}_2$

(3) $4!$

(4) $\dfrac{5!}{3!}$

확인2〉 다음을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

(1) ${}_n\mathrm{P}_n = 24$

(2) ${}_5\mathrm{P}_3 = 5 \times {}_n\mathrm{P}_2$

2. 조합

(1) 조합: 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(0 \le r \le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

예) 1, 2, 3, 4, 5 중 순서를 생각하지 않고 3개를 택하는 것을 ${}_5\mathrm{C}_3$이라 한다.

(2) 조합의 수

① 조합은 순서를 생각하지 않기 때문에 순열에서 r개를 순서대로 나열하는 방법만큼 곱하지 않으면 되므로 순열의 수에서 r개를 일렬로 나열하는 방법의 수($r!$)로 나누면 된다.

즉 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $(0 < r < n)$

② $r = 0$이면 아무것도 택하지 않는 방법의 수이고 그 수는 1이므로 ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$이다.

또 이를 위의 식에 대입하면 ${}_n\mathrm{C}_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$이 되어 위 식이 성립한다.

($0! = 1$ 이용)

③ $r = n$이면 모두를 택하는 방법의 수이고 그 수는 1이므로 ${}_n\mathrm{C}_n = 1$이다.

또 이를 위 식에 대입하면 ${}_n\mathrm{C}_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$이 되어 위 식이 성립한다.

④ 이를 종합하면 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $(0 \le r \le n)$이다.

⑤ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 것은 n개에서 $(n-r)$개를 택하는 것과 같으므로 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$이 성립한다.

⑥ 서로 다른 n개에서 r개를 택할 때, 특정한 원소가 포함되거나 포함되지 않는 경우가 있으므로 특정한 원소가 포함될 때는 서로 다른 $(n-1)$개 중 $(r-1)$개를 택하고, 특정한 원소가 포함되지 않을 때에는 서로 다른 $(n-1)$개에서 r개를 택하면 되므로 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$이 성립한다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 다음 조합의 수를 구하시오.

(1) ${}_{10}C_3 = \dfrac{10\times 9\times 8}{\square\times\square\times\square} = \square$

(2) ${}_8C_4 = \dfrac{\square\times\square\times\square\times\square}{4\times 3\times 2\times 1} = \square$

확인4〉 다음을 각각 구하고 그 값을 비교하시오.

(1) ${}_7C_3$

(2) ${}_5C_3$

${}_7C_4$

${}_4C_3 + {}_4C_2$

확인5〉 다음을 ${}_nP_r$ 또는 ${}_nC_r$로 나타내고 경우의 수를 구하시오.

(1) 서로 다른 맛의 사탕 10개 중 4개를 택해서 상자의 넣는 경우의 수

(2) 20명의 학생 중 대표 2명을 뽑는 경우의 수

(3) 서로 다른 맛의 사탕 10개 중 4개를 택해서 일렬로 나열하는 경우의 수

(4) 20명의 학생 중 회장, 부회장을 1명씩 뽑는 경우의 수

대표유형 ${}_nP_r$의 값

1. 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_6P_2$

(2) ${}_3P_2 \times {}_4P_2$

쌍둥이유형

1-1. 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_4P_3$

(2) ${}_5P_2 + {}_4P_2$

대표유형 순열의 수

2. 8개의 팀 중 3팀을 선택해서 공연 순서를 정할 때, 가능한 경우의 수를 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 10종류의 교과서 중 4권을 선택해서 책장에 꽂는 경우의 수를 구하시오.

대표유형 계승

3. 5명이 발표를 할 때, 발표 순서를 고려하여 정하는 경우의 수를 구하시오.

쌍둥이유형

3-1. 1, 3, 5, 7, 9를 한 번씩 사용해서 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하시오.

대표유형 ${}_nC_r$의 값

4. 조합의 수를 구하시오.

(1) ${}_5C_2$

(2) ${}_5C_3$

(3) ${}_5C_3 \times {}_4C_3$

쌍둥이유형

4-1. 조합의 수를 구하시오.

(1) ${}_{10}C_2$

(2) ${}_{10}C_7$

(3) ${}_{15}C_1 \times {}_{14}C_{14}$

대표유형 조합의 수

5. 두 자리 자연수에서 십의 자리의 수는 홀수, 일의 자리의 수는 짝수인 수의 개수를 구하시오.

쌍둥이유형

5-1. 남자 6명, 여자 4명으로 구성된 동아리에서 남자 대표 1명, 여자 대표 1명을 정하는 경우의 수를 구하시오.

대표유형 조합의 수

6. 1부터 10까지 적힌 공이 하나씩 들어있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때, 1이 적힌 공을 포함하여 꺼내는 경우의 수를 구하시오.

쌍둥이유형

6-1. 1부터 12까지 적힌 공이 하나씩 들어있는 주머니에서 동시에 4개의 공을 꺼낼 때, 2가 적힌 공을 포함하여 꺼내는 경우의 수를 구하시오.

4

행 렬

4-0 중학교 개념으로 확인하기
4-0 중학교 문제로 다지기
4-1 행렬과 그 연산

수학 도움닫기
4-0

중학교 개념으로 확인하기

미지수가 2개인 연립일차방정식 (중2)

1. 미지수가 2개인 연립일차방정식

미지수가 2개이고 그 차수가 모두 1인 방정식

$ax+by+c=0$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq 0,\ b\neq 0$) 의 꼴로 나타낼 수 있다.

미지수가 1개인 일차방정식 또는 미지수가 2개인 일차방정식을 간단히 일차방정식이라고 한다.

2. 연립방정식

(1) 연립방정식: 두 개 이상의 방정식을 한 쌍으로 묶어 나타낸 것

(2) 미지수가 2개인 연립일차방정식:
연립방정식에서 각각의 방정식이 일차방정식이고 미지수가 2개인 일차방정식을 포함하는 연립방정식

(3) 연립방정식의 해: 연립방정식에서 각각의 방정식의 공통의 해

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음 미지수가 2개인 일차방정식을 모두 찾으시오.

① $x-2y-1=0$

② $2x+5=2(x-y)$

③ $x+5y=7$

④ $y=x^2+4$

확인2〉 다음 중에서 해가 $x=3,\ y=1$인 연립방정식을 찾으시오.

① $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases}$

② $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 4x-2y=10 \\ -x+4y=1 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

미지수가 2개인 연립일차방정식 (중2)

1. 연립일차방정식 풀이

한 미지수를 없애기 위하여 한 방정식을 어떤 미지수에 대하여 정리한 식을

다른 방정식의 그 미지수에 **대입**하여 연립방정식을 푸는 방법을 **대입법**이라고 한다.

(예) $\begin{cases} x=2y & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=7500 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

이 식에서 미지수 x를 없애기 위하여 ①을 ②에 대입하면

$2\times 2y+y=7500$이므로,

$5y=7500$과 같이 미지수가 1개인 방정식을 얻는다.

이 방정식을 풀면 $y=1500$이고, 이것을 ①에 대입하면 $x=3000$이다.

따라서 이 연립방정식의 해는 $x=3000$, $y=1500$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 대입법을 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

$\begin{cases} x=-4y+1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

확인4〉 대입법을 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

$\begin{cases} x=-4y+1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

2. 연립일차방정식 풀이

한 미지수를 없애기 위하여 두 방정식을 변끼리 더하거나 빼서 연립방정식을 푸는 방법을 가감법이라고 한다.

(예) 미지수가 2개인 연립방정식을 풀 때,

두 방정식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 없앨 수도 있다.

이 방법을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어 보자.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots ① \\ x-y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & x+y=7 \\ +) & x-y=5 \\ \hline & 2x \quad\quad =12 \end{array}$$

미지수 y를 없애기 위하여 ①과 ②를 변끼리 더하면

$2x=12$

이므로 $x=6$이다. 이것을 ①에 대입하면

$6+y=7$

이므로 $y=1$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=6,\ y=1$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 가감법을 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x+4y=6 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$$

확인6〉 가감법을 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

수학 도움닫기

4-0

중학교 문제로 다지기

문제 1

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 3x+2y=4 & \cdots\cdots ① \\ 5x-4y=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

문제 2

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ① \\ 2x+5y=20 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

문제 3

다음을 x와 y에 대한 일차방정식으로 나타내시오.

(1) 세 잎 클로버 x개와 네 잎 클로버 y개의 잎의 개수를 모두 합하면 41이다.

(2) 1000원짜리 우유 x개와 700원짜리 빵 y개를 사고 지불한 금액이 3400원이다.

문제 4

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x=3y+14 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

문제 5

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x-3y=4 & \cdots\cdots ① \\ 4x-6y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

문제 6

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ① \\ 3x+6y=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

문제 7

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 0.4x-0.3y=-1.2 & \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

문제 8

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x-(y+1)=4 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$$

문제 9

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2(x+3)=11-(y-x) \\ x=3(y-1) \end{cases}$$

문제 10

연립방정식을 푸시오.

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=4 \end{cases}$$

문제 11

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=1 \\ bx-ay=3 \end{cases}$의 해가 $x=1,\ y=2$일 때, 두 상수 a와 b의 값을 각각 구하시오.

문제 12

두 연립방정식 $\begin{cases} 4x-3y=a \\ x+2y=5 \end{cases}$ 와 $\begin{cases} 5x-6y=9 \\ 2x-3y=b \end{cases}$ 의 해가 같을 때, $a-b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 상수이다.)

문제 13

연립방정식 $\begin{cases} x+ay=4 \\ \frac{3}{2}x-y=6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

문제 14

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=5 \\ bx+ay=-7 \end{cases}$에서 잘못하여 a와 b를 서로 바꾸어 놓고 풀었더니 해가 $x=-1$, $y=3$이었다. 처음의 연립방정식을 푸시오.

(단, a와 b는 상수이다.)

문제 15

연립방정식 $\begin{cases} 0.2x-0.3y=0.6 \\ \dfrac{x-y}{3}+1=\dfrac{y}{2} \end{cases}$ 를 푸시오.

문제 16

연립방정식 $\begin{cases} 3x-ay=4 \\ x-2y=12 \end{cases}$ 를 만족시키는 y의 값이 x의 값의 2배일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

수학 멀리뛰기

4-1 행렬과 그 연산

1. 행렬의 뜻

(1) 행렬: 몇 개의 수 또는 문자를 직사각형 꼴로 배열하여 괄호로 묶은 것

예) 어느 학교 2학년 1반과 2학년 2반의 수학 중간고사와 기말고사 평균 점수가 다음 표와 같다고 할 때, 직사각형 꼴로 배열하여 괄호로 묶으면 오른쪽과 같다. 이를 행렬이라 한다.

학급	중간 고사	기말 고사
2학년 1반	75	77
2학년 2반	74	78

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 75 & 77 \\ 74 & 78 \end{pmatrix}$

(2) 성분: 행렬을 이루는 각 수나 문자를 그 행렬의 성분이라 함.

(3) 행: 행렬의 성분이 가로로 배열되어 이루는 줄

(4) 열: 세로로 배열되어 이루는 줄

(5) 행렬의 제i행과 제j열이 만나는 곳의 성분을 그 행렬의 (i, j)성분이라 한다.

(6) m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬을 $m \times n$행렬이라 한다.

예) 행렬 $(1 \quad 2 \quad 3)$ 의 꼴 >> 1×3 또는 1행 3열

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음 행렬은 ( )×( ) 행렬이다.

$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

확인2〉 행렬 $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$에서 (2,1) 성분은?

2. 서로 같은 행렬

(1) 행렬의 이름으로 보통 영문 대문자 $A, B, \cdots$를 사용한다.

두 행렬 A, B 에 대해, A, B 의 행과 열의 개수가 일치할 때, A, B는 같은 꼴이라 한다.

(2) 두 행렬 A, B가 같은 꼴이고 대응하는 성분이 모두 같을 때, 두 행렬 A, B는 서로 같다고 하고 기호로 $A = B$ 와 같이 나타낸다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a=x,\ b=y,\ c=u,\ d=v$$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 $\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$일 때, x, y 값은?

확인4〉 다음 행렬에 x, y 값은?

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -x+2y \end{pmatrix}$$

3. 행렬의 덧셈과 뺄셈

(1) 행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+u & d+v \end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-u & d-v \end{pmatrix}$$

(2) 행렬의 덧셈에 대한 성질

같은 꼴의 임의의 행렬 A, B, C 와 영행렬 O 에 대해

(영행렬 O: 행렬의 모든 성분이 0으로 구성된 행렬을 말함)

① $A+B=B+A$ (교환법칙)

② $(A+B)+C=A+(B+C)$ (결합법칙)

③ $A+O=O+A=A$

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 다음을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

확인6〉 다음 식에 맞는 실수 x, y를 구하라.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -y & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

4. 행렬의 곱셈

(1) 행렬의 실수배

$$\text{행렬 } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{와 실수 } k\text{에 대하여 } kA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 두 행렬에 대해 $2A+B$ 의 모든 성분의 합을 구하라.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 행렬의 곱셈

두 행렬 A, B의 곱셈은 앞 행렬 A의 열의 개수와 뒤 행렬 B의 행의 개수가 같을 때,
즉, 행렬A는 $m\times k$ 행렬이고, 행렬B는 $k\times n$ 행렬 일 때 두 행렬을 곱할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$$

(예) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 6+4\times 5 & 1\times 2+4\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 14 \end{pmatrix}$

(3) 행렬 곱셈의 성질

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C 와 실수 k에 대해

① $(AB)C=A(BC)$ (결합법칙)

② $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ (분배법칙)

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

④ $AB\neq BA$ (교환 법칙이 성립하지 않음)

〈스스로 확인하기〉

확인8〉 행렬의 곱을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) 단위행렬의 성질

① 단위행렬 E: 행과 열이 일치하는 위치에 있는 성분은 1이고, 그 외 성분은 모두 0인 정사각행렬을 단위행렬이라 한다.

예) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

임의의 정사각행렬 A와 같은 꼴인 단위행렬 E에 대해

$$AE = EA = A$$

〈스스로 확인하기〉

확인9〉 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1\\2&-2\end{pmatrix}$ 에 대하여 다음을 구하여라.

(1) AB

(2) BA

확인10〉 행렬의 곱을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\\2&-4\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}2&6\\1&-3\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\0&5\end{pmatrix}$

확인11〉 계산과정에서 잘못된 부분을 찾아 올바르게 계산하시오.

① $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times5&2\times6\\3\times7&4\times8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&12\\21&32\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(3\quad4)=1\times3+2\times4=11$

대표유형

행렬 뜻

1. 등식을 만족하는 실수 x, y의 값을 구하여라.

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

쌍둥이유형

1-1. 등식을 만족하는 실수 x, y의 값을 구하여라.

$$\begin{pmatrix} x-y & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -2x^2 \end{pmatrix}$$

대표유형 행렬 덧셈, 뺄셈

2. 다음을 계산하시오.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\1 & 7 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\-5 & 0 & 6\end{pmatrix}$

쌍둥이유형

2-1. 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$ 일 때, 등식 $A+X=B$를 만족하는 행렬 X를 구하여라.

대표유형 행렬 곱셈

3. 행렬의 곱을 계산하여라.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

쌍둥이유형

3-1. 다음을 계산하여라.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

대표유형 행렬 곱셈

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, A^3을 구하여라.

쌍둥이유형

4-1. 단위행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $-E$

(2) E^3

(3) $E^{100}+(-E)^{100}$

5

도형의 방정식(1)

5-0 중학교 개념으로 확인하기
5-0 중학교 문제로 다지기
5-1 선분의 내분
5-2 두 직선의 평행과 수직
5-3 점과 직선 사이의 거리

수학 도움닫기
5-0

중학교 개념으로 확인하기

순서쌍과 좌표평면(중1)

1. 순서쌍

순서를 정하여 두 수를 괄호 안에 짝지어 나타낸 것

예) $(2,\ 3)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 4)$

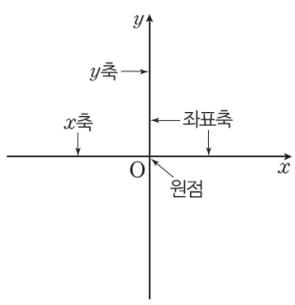
순서쌍은 두 수의 순서를 정하여 나타낸 것이므로 $(4,\ 5)$와 $(5,\ 4)$는 서로 다르다.

2. 좌표평면

오른쪽 그림과 같이 두 수직선이 각각의 원점에서 서로 수직으로 만나게 그린다.

이때 가로의 수직선을 x축, 세로의 수직선을 y축이라 하고, x축과 y축을 통틀어 좌표축이라고 한다.

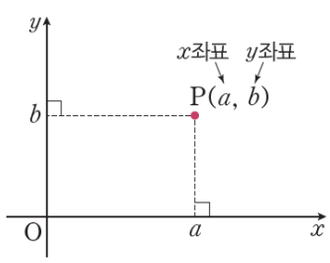
또 두 좌표축이 만나는 점 O를 좌표평면의 원점이라 하고, 두 좌표축이 그려진 평면을 좌표평면이라고 한다.



좌표평면 위의 한 점 P에서 x축, y축에 각각 내린 수선과 x축, y축이 만나는 점이 나타내는 수가 각각 a, b일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$를 점 P의 좌표라고 한다.

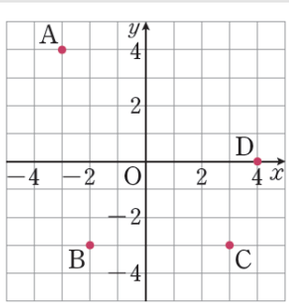
좌표평면 위의 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, 이것을 기호로 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 같이 나타낸다.

이때 a를 점 P의 x좌표, b를 점 P의 y좌표라고 한다.



〈스스로 확인하기〉

확인1〉 좌표평면을 보고 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 기호로 나타내시오.



3. 사분면

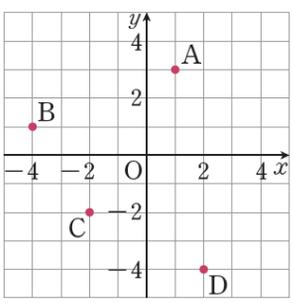
좌표평면은 오른쪽 그림과 같이 좌표축에 의하여 네 부분으로 나누어지며, 그 각 부분을 제 1사분면, 제 2사분면, 제 3사분면, 제 4사분면이라고 한다.

이때 좌표축은 어느 사분면에도 포함되지 않는다.



〈스스로 확인하기〉

확인2〉 네 점이 각각 어느 사분면 위에 있는지 알아보고, 각 점의 x좌표와 y좌표의 부호를 조사하여 다음 표를 완성해 보자.



→

점	사분면	x좌표의 부호	y좌표의 부호
A	제 1사분면	+	
B			
C			−
D			

확인3〉 각 점은 어느 사분면 위에 있는지 말하시오.

(1) $A(3,\ -5)$

(2) $B(4,\ 1)$

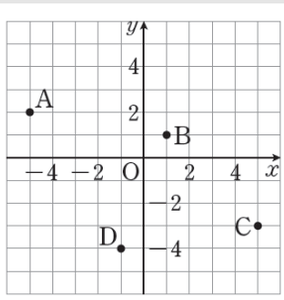
(3) $C\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{3}{2}\right)$

(4) $D(-1.5,\ 2.8)$

확인4〉 좌표평면을 보고, 다음 물음에 답하시오.

(1) 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 기호로 나타내시오.

(2) 두 점 $E(-4,\ -3)$, $F(4,\ 5)$를 오른쪽 좌표평면 위에 각각 나타내시오.



일차함수와 그 그래프(중2)

1. 일차함수

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서

$y=ax+b$ (단, a, b는 수, $a\neq 0$)

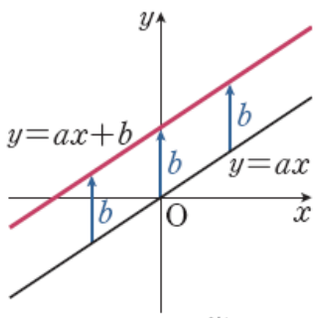
와 같이 y가 x에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 이 함수 $y=f(x)$를 x에 대한 일차함수라고 한다.

2. 일차함수 그래프

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는

일차함수 $y=ax$의 그래프를

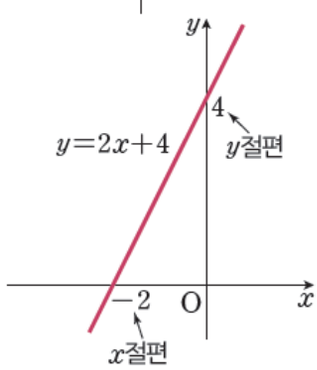
y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이다.



① 평행이동: 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 평행이동이라고 한다.

② x절편: 함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 그 그래프의 x절편이라 한다.

③ y절편: 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표를 그 그래프의 y절편이라 한다.

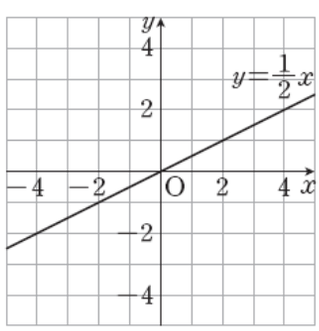


〈스스로 확인하기〉

확인5〉 그림은 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프이다.
이 그래프를 이용하여 좌표평면 위에 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$

(2) $y=\frac{1}{2}x-3$



3. 기울기

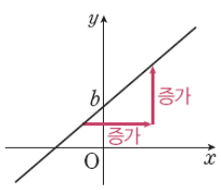
일반적으로 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며, 이 비율은 x의 계수 a와 같다.

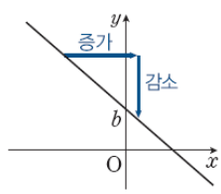
이 증가량의 비율 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기라고 한다.

> 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서
>
> $$(\text{기울기}) = \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} = a$$

4. 일차함수 그래프 성질(1)

> 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는
>
> ① $a>0$이면 오른쪽 위로 향한다. ② $a<0$이면 오른쪽 아래로 향한다.





5. 일차함수 그래프 성질(2)

> ① 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.
>
> ② 서로 평행한 두 일차함수의 그래프의 기울기는 같다.

〈스스로 확인하기〉

확인6〉 일차함수의 그래프의 기울기를 구하시오.

$y=-\frac{5}{7}x-4$

확인7〉 일차함수 중에서 그래프가 서로 평행한 것끼리 짝 지으시오.

(1) $y=3x-1$ (2) $y=-3x-1$ (3) $y=3x+4$

(4) $y=\frac{3}{2}x-3$ (5) $y=\frac{3}{2}x+5$ (6) $y=-3x+\frac{4}{3}$

수학 도움닫기

5-0

중학교 문제로 다지기

문제 1

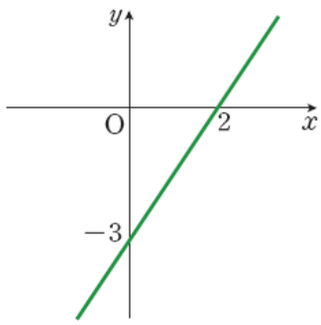
기울기가 3이고 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

문제 2

두 점 $(-1,\ 3)$과 $(2,\ -3)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.

문제 3

그림과 같은 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구하시오.



문제 4

일차함수의 그래프의 x절편과 y절편, 기울기를 각각 구하시오.

(1) $y=3x+4$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+6$

문제 5

일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 일차함수 $y=-\frac{2}{3}x+b$의 그래프가 된다. 이때 두 상수 a와 b의 값을 각각 구하시오.

문제 6

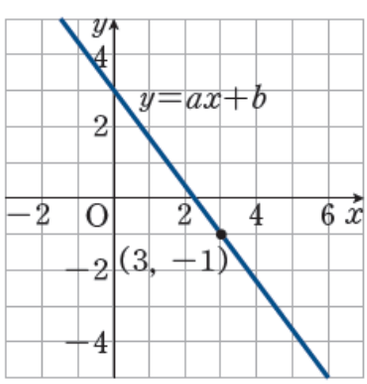
일차함수 $y=\frac{2}{5}x-4$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

문제 7

두 점 $(-2,\ 3)$과 $(6,\ k)$를 지나는 일차함수의 그래프가 일차함수 $y=\frac{3}{4}x-2$의 그래프와 평행할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

문제 8

그림은 일차함수 $y=ax+b$의 그래프이다. 두 상수 a와 b의 값을 각각 구하시오.

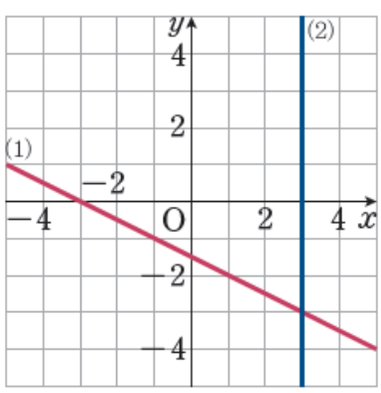


문제 9

일차방정식 $3x+y+1=0$의 그래프를 그리시오.

문제 10

그림의 두 직선의 방정식을 각각 구하시오.



문제 11

두 일차방정식의 그래프의 교점의 좌표를 구하시오.

- $y=-x$
- $y=2x+3$

문제 12

그래프를 이용하여 다음 연립방정식을 푸시오.

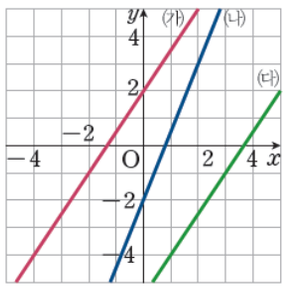
$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

문제 13

그림과 같이 좌표평면 위에 세 직선 (가), (나), (다)가 있다. 다음을 만족시키는 두 직선을 찾고, 그 이유를 말해 보자.

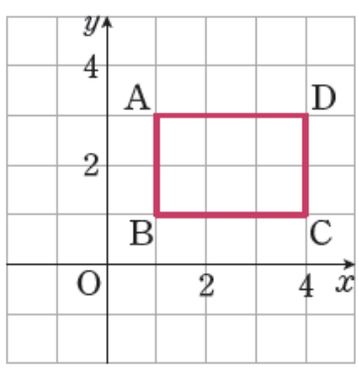
(1) 한 점에서 만나는 두 직선

(2) 서로 만나지 않는 두 직선



문제 14

그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$, $\mathrm{D}(4,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형이 있다. 일차함수 $y=ax-1$의 그래프가 이 사각형과 만나도록 하는 수 a의 값의 범위를 구하시오.



문제 15

세 수 a, b, c에 대하여 $a>0$, $b>0$, $c<0$일 때, 일차방정식 $ax-by-c=0$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.

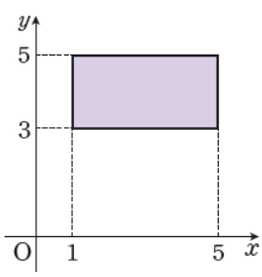
문제 16

그림의 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하려고 한다.
다음을 만족시키는 직선의 방정식을 구해 보자.

(1) x축에 평행한 직선

(2) y축에 평행한 직선

(3) 원점을 지나는 직선



수학 멀리뛰기

5-1

선분의 내분

1. 두 점 사이의 거리

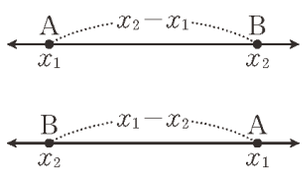
(1) 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리: $\overline{AB}=|x_2-x_1|$

※ 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는

$x_1 \le x_2$일 때, $\overline{AB}=x_2-x_1$

$x_1 > x_2$일 때, $\overline{AB}=x_1-x_2$

이므로 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$ 이다.



예) 두 점 $A(-2)$, $B(4)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(1)$, $B(7)$

(2) $A(-6)$, $B(2)$

(2) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리: $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

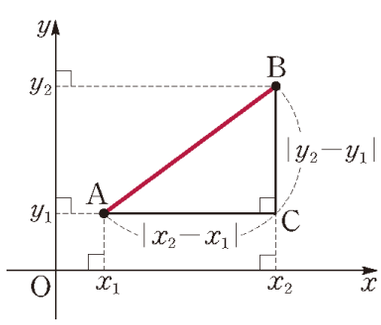
※ 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선의 교점을 C라고 하면 점 C의 좌표는 (x_2, y_1)이므로

$\overline{AC}=|x_2-x_1|$, $\overline{BC}=|y_2-y_1|$

이다.

이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$

$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ 이다.



따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

특히, 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$ 이다.

〈좌표평면 위의 두 점 사이의 거리〉

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

예) 두 점 $A(5,\ -2)$, $B(3,\ 2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(3-5)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

〈스스로 확인하기〉

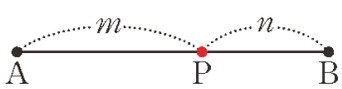
확인2〉 다음 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(2,\ 5)$, $B(-6,\ 9)$ (2) $A(-5,\ -1)$, $B(0,\ -3)$

$\overline{AB}=\sqrt{\{(-6)-\square\}^2+(9-\square)^2}=\square$

2. 선분의 내분점

(1) 선분 AB 위의 점 P에 대하여



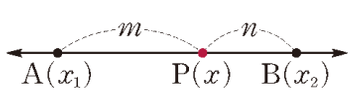
$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0)$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 하며, 점 P를 선분 AB의 내분점이라고 한다.

(2) 수직선 위의 선분의 내분점

⇒ 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 $P(x)$의 좌표를 구하면,

① $x_1<x_2$일 때, $\overline{AP}=x-x_1$, $\overline{PB}=x_2-x$이므로

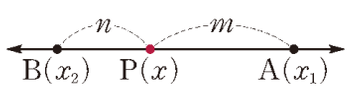


$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$에서 $(x-x_1):(x_2-x)=m:n$

$m(x_2-x)=n(x-x_1)$, $(m+n)x=mx_2+nx_1$

이다. 따라서 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$이다.

② $x_1>x_2$일 때, 같은 방법으로 구하면



$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$이다.

특히, $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이고, 그 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 이다.

〈수직선 위의 선분의 내분점〉

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라고 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

예) 두 점 $A(-2)$, $B(5)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점의 좌표는 $\frac{4\times5+3\times(-2)}{4+3}=2$

(2) 선분 AB의 중점의 좌표는 $\frac{(-2)+5}{2}=\frac{3}{2}$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 두 점 $A(-4)$, $B(6)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $3:7$로 내분하는 점

(2) 선분 AB의 중점

(3) 좌표평면 위의 선분의 내분점

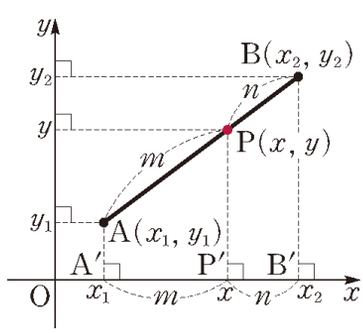
⇒ 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 $P(x,\ y)$의 좌표를 구하면, 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라고 하면

$$\overline{A'P'}:\overline{P'B'}=\overline{AP}:\overline{PB}=m:n \quad \text{이므로}$$

점 P′은 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이다.

즉 점 P의 x좌표는 $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$ 이다.

같은 방법으로 점 P의 y좌표를 구하면 $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$이다.



따라서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ 이다.

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

〈좌표평면 위의 선분의 내분점〉

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

예) 두 점 $A(-2,\ 2)$, $B(4,\ 8)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $2:1$으로 내분하는 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$x_1=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2,\qquad y_1=\frac{2\times8+1\times2}{2+1}=6$$ 이므로 $(2,\ 6)$

(2) 선분 AB의 중점의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면

$$x_2=\frac{(-2)+4}{2}=1,\qquad y_2=\frac{2+8}{2}=5$$ 이므로 $(1,\ 5)$

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 두 점 $A(-4,\ 3)$, $B(6,\ -7)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $3:2$으로 내분하는 점

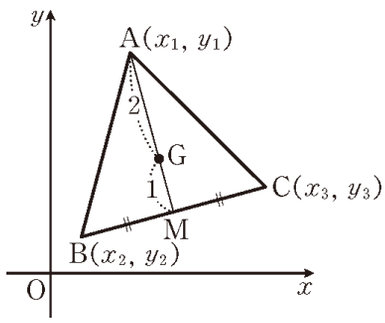
(2) 선분 AB의 중점

3. 삼각형 무게중심의 좌표

(1) 삼각형의 세 중선의 교점을 무게중심이라 한다.

(2) 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 내분한다.

(3) 삼각형 무게중심의 좌표



⇒ 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 $\mathrm{M}(x',\ y')$이라 하면

$x'=\dfrac{x_2+x_3}{2}$, $y'=\dfrac{y_2+y_3}{2}$ 이므로 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ 이다.

무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 G가 $\overline{\mathrm{AM}}$을 $2:1$로 내분하므로

$$x=\frac{2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 **무게중심 G의 좌표는** $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ 이다.

예) 세 점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$, $\mathrm{C}(-5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하면

$\left(\dfrac{2+0+(-5)}{3},\ \dfrac{(-3)+1+2}{3}\right)=(-1,\ 0)$ 이다.

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 세 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$, $\mathrm{B}(7,\ -2)$, $\mathrm{C}(5,\ 9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

대표유형 두 점 사이의 거리

1. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ -3)$ 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ 1-a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

대표유형 같은 거리에 있는 점의 좌표

2. 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-2,\ 7)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 Q의 좌표를 구하시오.

대표유형 두 점 사이의 거리 활용

3. 세 점 $A(2, -2)$, $B(3, 1)$, $C(6, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

쌍둥이유형

3-1. 세 점 $A(0, -1)$, $B(3, 3)$, $C(7, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

대표유형 선분의 내분점

4. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

쌍둥이유형

4-1. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 6)$, $\mathrm{B}(5,\ -2)$에 대하여 선분AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $b-a$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

대표유형 선분의 내분점

5. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(8,\ 4)$를 잇는 선분 AB를 $5:2$로 내분하는 점이 직선 $y=-x+a$ 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

5-1. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $k:2$로 내분하는 점이 직선 $y=x+3$ 위에 있을 때, 양수 k의 값을 구하시오.

대표유형 선분의 내분점의 활용

6. 세 점 $A(3, 1)$, $B(-2, -4)$, $C(8, 6)$에 대하여 선분AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분PQ의 길이를 구하시오.

쌍둥이유형

6-1. 세 점 $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$, $C(-3, 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하시오.

대표유형 중점의 활용

7. 네 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ -1)$, $\mathrm{C}(8,\ 2)$, $\mathrm{D}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

7-1. 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 6)$, $\mathrm{B}(a,\ 3)$, $\mathrm{C}(4,\ b)$, $\mathrm{D}(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

대표유형 삼각형 무게중심의 좌표

8. 삼각형 ABC에서 두 꼭짓점이 $A(6, -3)$, $B(1, 9)$이고, 삼각형 ABC의 무게중심이 $G(1, 5)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하시오.

쌍둥이유형

8-1. 세 점 $A(a, -4)$, $B(-1, b)$, $C(5, 7)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 $G(2, 3)$일 때, a, b의 값을 구하시오.

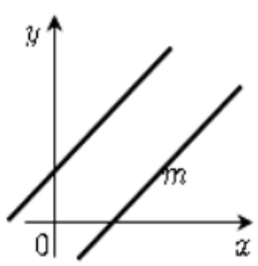
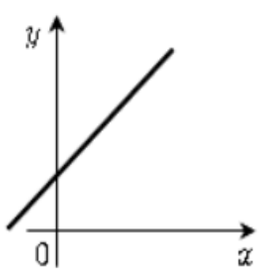
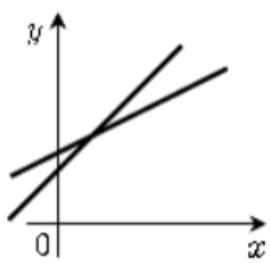
수학 멀리뛰기

5-2

두 직선의 평행과 수직

1. 두 직선의 위치 관계

한 평면 위에서 두 직선 사이의 위치 관계는 평행한 경우, 일치하는 경우, 한 점에서 만나는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

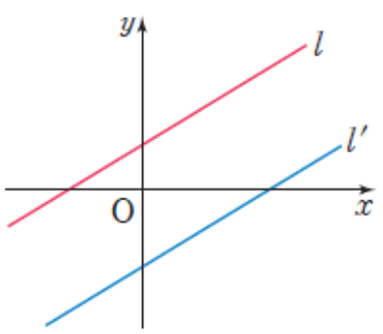
(1) 평행하다.	(2) 일치한다.	(3) 한 점에서 만난다.
		

2. 두 직선의 평행 조건

두 직선 $l: y=mx+n$, $l': y=m'x+n'$에 대하여

l과 l'이 서로 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$이다.

거꾸로 $m=m'$, $n\neq n'$이면 l과 l'은 서로 평행하다.



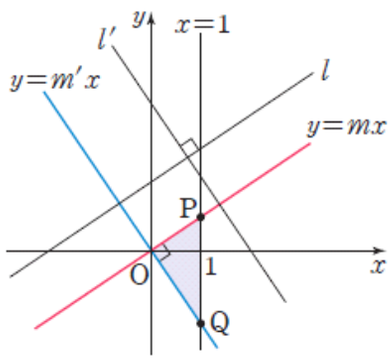
<스스로 확인하기>

확인1〉 다음 중 서로 평행한 직선끼리 선으로 연결하시오.

① $y=2x+1$	•	• ㉠ $4x-2y+3=0$
② $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	•	• ㉡ $-6x-2y+3=0$
③ $y=-3x+2$	•	• ㉢ $2x-4y+1=0$

확인2〉 점 $(4,\ -2)$를 지나고 $y=-x+3$에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

3. 두 직선의 수직 조건



두 직선 $l : y = mx + n$, $l' : y = m'x + n'$에 대하여

l과 l'이 서로 수직이면 $mm' = -1$이다.

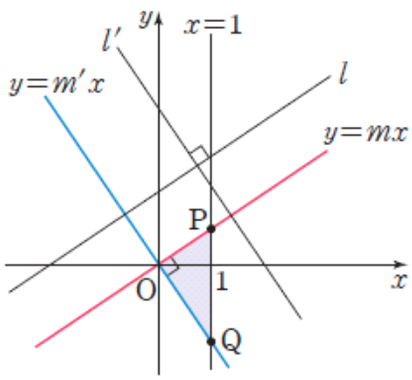
거꾸로 $mm' = -1$이면 l과 l'은 서로 수직이다.

※ 좌표평면 위의 두 직선이 서로 수직일 조건을 알아보자.

두 직선

$l : y = mx + n$, $l' : y = m'x + n'$

이 서로 수직일 조건은 원점을 지나고 두 직선 l과 l'에 각각 평행한 두 직선 $y = mx$와 $y = m'x$가 서로 수직일 조건과 같다.



오른쪽 그림과 같이 직선 $x = 1$과

두 직선 $y = mx$, $y = m'x$의 교점을 각각 P, Q라고 하면

$\mathrm{P}(1,\ \mathrm{m})$, $\mathrm{Q}(1,\ \mathrm{m}')$이다.

두 직선 $y = mx$와 $y = m'x$가 서로 수직이면

삼각형 POQ는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2$ 이다.

이때 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = 1 + \mathrm{m}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2 = 1 + \mathrm{m}'^2$, $\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (\mathrm{m} - \mathrm{m}')^2$이므로

$(1 + m^2) + (1 + m'^2) = (m - m')^2$

이고, 이 식을 정리하면 $mm' = -1$이다.

따라서 두 직선 l과 l'이 서로 수직이면 $mm' = -1$이다.

거꾸로 $mm' = -1$이면 두 직선 l과 l'은 서로 수직이다.

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 다음 중 서로 수직인 직선끼리 선으로 연결하시오.

① $y = -2x + 5$	•	•	㉠ $6x + 3y + 1 = 0$
② $y = \frac{1}{2}x + 1$	•	•	㉡ $x - 2y + 2 = 0$
③ $y = 2x - 6$	•	•	㉢ $x + 2y - 1 = 0$

확인4〉 점 $(-4,\ 3)$을 지나고 $y = -\frac{2}{5}x + 3$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

4. 표준형과 일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계

일반형으로 주어진 두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ 은 $b\neq 0, b'\neq 0$ 일 때

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$

이므로 두 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$ 이고, y절편은 각각 $-\frac{c}{b}$, $-\frac{c'}{b'}$ 이다.

따라서 두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ 에 대하여

(1) 두 직선이 서로 평행할 조건

$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$ 이므로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}\neq\frac{b}{b'}$

따라서 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

(2) 두 직선이 일치할 조건

$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$ 이므로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}$

따라서 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

(3) 두 직선이 한 점에서 만날 조건

$-\frac{a}{b}\neq-\frac{a'}{b'}$ 이므로 $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

(4) 두 직선이 서로 수직일 조건

$-\frac{a}{b}\times\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$ 이므로 $\frac{aa'}{bb'}=-1$

따라서 $aa'+bb'=0$

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 두 직선 $ax+y-1=0, x-y-7=0$ 이 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

확인6〉 두 직선 $ax+y-1=0, x-y-7=0$ 이 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

5. 표준형과 일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계

두 직선의 위치 관계	$\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases}$	$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$	두 직선의 교점의 개수	연립방정식의 해의 개수
평행하다	$m=m'$, $n\neq n'$ ⇨ 기울기가 같고, y절편이 다르다.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	없다.	없다.(불능)
일치한다.	$m=m'$, $n=n'$ ⇨ 기울기와 y절편이 각각 같다.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	무수히 많다.	무수히 많다. (부정)
수직이다.	$mm'=-1$ ⇨ (두 직선의 기울기의 곱) $=-1$	$aa'+bb'=0$	한 개	한 쌍
한 점에서 만난다.	$m\neq m'$ ⇨ 기울기가 다르다.	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	한 개	한 쌍

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 다음 두 직선이 일치할 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오.

(1) $y=ax+5$, $y=-x+b$

(2) $ax+3y-2=0$, $3x+by+6=0$

확인8〉 다음 두 직선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $y=ax-4$, $y=2x+1$

(2) $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$

대표유형 두 직선의 평행조건

1. 점 $(-3, 1)$을 지나고 직선 $6x-3y+1=0$에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 점 $(4, \ -2)$를 지나고 $x-4y+1=0$에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

대표유형 두 직선의 수직조건

2. 점 $(2,\ 5)$를 지나고 직선 $3x-9y+4=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 점 $(-4,\ 3)$을 지나고 $2x+y-4=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

대표유형 두 직선의 위치관계

3. 두 점 $(-1,\ 1),\ (3\ ,\ 3)$을 지나는 직선에 수직이고, 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

쌍둥이유형

3-1. 두 점 $(-4,\ -1),\ (2\ ,\ -3)$을 지나는 직선에 수직이고, 점 $(1,\ -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

대표유형 두 직선의 위치관계

4. 두 직선 $x+ay-1=0$, $(a-5)x-6y+2=0$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 직선이 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 두 직선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

쌍둥이유형

4-1. 두 직선 $3x+(a-2)y+1=0$, $ax+y+1=0$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 직선이 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 두 직선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

대표유형 직선의 방정식

5. 다음 직선과 평행하고 점 $(5,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=x+4$

(2) $2x+y-3=0$

쌍둥이유형

5-1. 다음 직선과 수직이고 점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=-x+3$

(2) $x-3y+5=0$

대표유형 선분의 수직 이등분선의 방정식

6. 두 점 $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

쌍둥이유형

6-1. 두 점 $A(2, -1)$, $B(4, 3)$을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

대표유형 두 직선의 위치관계

7. 두 직선 $y=(2a+1)x-a+2$, $y=(a+2)x+2$가 서로 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

7-1. 두 직선 $y=(2a+1)x-a+2$, $y=(a+2)x+2$가 서로 수직일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

대표유형 두 직선의 위치관계

8. 두 직선 $y=-2(k+1)x-k$, $y=(k+1)^2x+3$ 이 서로 평행할 때, 상수 k 의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

8-1. 두 직선 $x+ay+a=0$, $ax+(a+2)y+4=0$ 이 일치할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

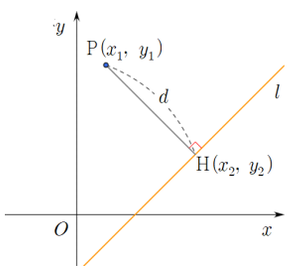
수학 멀리뛰기

5-3 점과 직선 사이의 거리

〈탐구하기〉

(1) 점과 직선 사이의 거리

- 좌표평면 위의 한 점 P에서 P를 지나지 않는 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때,
  선분 PH의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라고 한다.
- 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 직선 $l : ax+by+c=0$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$라고 하면, 점 P와 직선 l 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같다.



(2) 선분 PH의 길이 구하기

탐구1〉 $a\neq 0,\ b\neq 0$일 때, 선분 PH의 길이를 구하시오.

<풀이>

직선 $l : ax+by+c=0$에서 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$이므로, 직선 l의 기울기는 $\square\dfrac{\square}{\square}$이다.

직선 PH의 기울기는 $\dfrac{\square}{\square}$이다.

$\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이므로, $\square\dfrac{\square}{\square}\cdot\dfrac{\square}{\square}=-1$이고, 이 식을 변형하면, $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$이 된다.

$\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}=k$($k$는 실수)라 하면, $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$

즉, $x_2=\square$, $y_2=\square$ ····· ㉠

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)k^2}=|k|\sqrt{a^2+b^2}$ ····· ㉡

한편, 점 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$는 직선 l 위의 점이므로, $\square=0$ ····· ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면, $a(\square)+b(\square)+c=0$이다.

이 식을 정리하면, $ax_1+a^2k+by_1+b^2k+c=0$, $(a^2+b^2)k+ax_1+by_1+c=0$

$k=-\dfrac{\square}{\square}$ ····· ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면,

$\overline{\mathrm{PH}}=\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ····· ㉤

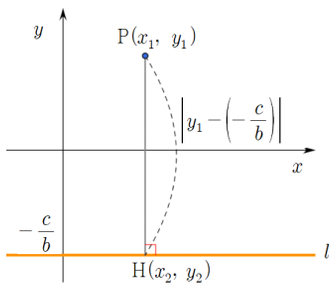
탐구2〉 $a=0,\ b\neq 0$일 때 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$와 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리를 구하시오.

<풀이>

직선 $l: ax+by+c=0$에서 $y=$□이므로,

$\overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1-\left(\square\right)\right|=\left|\dfrac{by_1+c}{b}\right|$

이것은 ㉡에서 $a=0$을 대입한 것과 같으므로, ㉠이 성립한다.



탐구3〉 탐구2〉와 같은 방법으로 $a\neq 0,\ b=0$일 때도 성립함을 보이시오.

1. 점과 직선 사이의 거리

(1) 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) 원점 $(0,\ 0)$와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Tip. 점과 직선 사이의 거리를 구할 때는 직선의 방정식의 일반형을 이용하여 푼다.

Tip. $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- 분자: 점 $(x_1,\ y_1)$을 $ax+by+c=0$에 대입한 값
- 분모: 계수들 제곱의 합

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음 점과 직선 $5x-12y+13=0$ 사이의 거리를 구하시오.

(1) $(5,\ 1)$ (2) $(3,\ -2)$

확인2〉 원점과 다음 직선 사이의 거리를 구하시오.

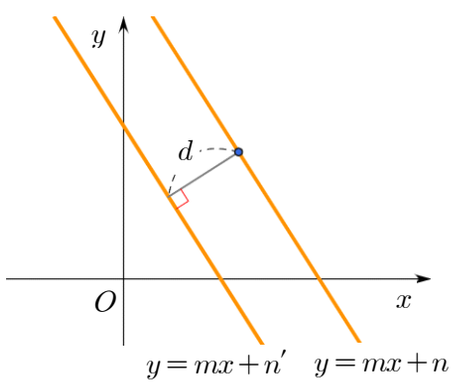
(1) $3x-4y+5=0$ (2) $x+2y-1=0$

2. 평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선 $y=mx+n$, $y=mx+n'$ $(n \neq n')$ 사이의 거리는 직선 $y=mx+n$위의 한 점과 직선 $y=mx+n'$ 사이의 거리와 같다.

예) 평행한 두 직선 $y=2x+3$, $y=2x+5$ 사이의 거리는 직선 $y=2x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=2x+5$ 사이의 거리와 같고, $y=2x+5$은 $2x-y+5=0$이므로,

$$\frac{|2\times 0-3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$



〈스스로 확인하기〉

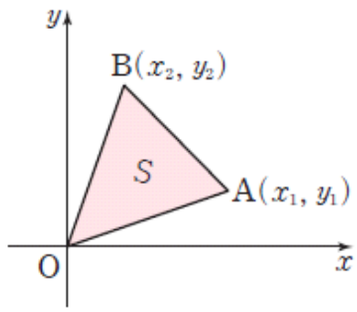
확인3〉 다음 두 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) $x-y+1=0$, $x-y+3=0$ (2) $x+2y-3=0$, $x+2y+2=0$

확인4〉 직선 $x-3y+2=0$에 평행하고, 원점에서 거리가 $\sqrt{2}$인 직선의 방정식을 구하시오.

2. 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 넓이 구하기

그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 삼각형 OAB의 넓이 S를 구하시오.



풀이)

삼각형 OAB는 $\overline{AB}$를 밑변으로 하고, 두 점 A, B를 지나는 직선과 원점 사이의 거리를 높이로 하는 삼각형이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2}$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하면,

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

즉, $(x_2-x_1)(y-y_1)-(y_2-y_1)(x-x_1)=0$

직선 AB와 원점과의 거리는

$\dfrac{|(x_2-x_1)\times(-y_1)-(y_2-y_1)\times(-x_1)|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$ 이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{2}$

〈스스로 확인하기〉

확인5〉 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ -1)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

풀이)

두 점 A, B 사이의 거리를 구하면, $\overline{AB}=\sqrt{\{2-(\square)\}^2+\{(-1)-\square\}^2}=\square$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{(-1)-2}{2-(-1)}\times\{x-(-1)\}$

$y=-x+1$, 즉, $x+y-1=0$이다.

직선 AB와 원점과의 거리는 $\dfrac{|1|}{\sqrt{\square^2+\square^2}}=\dfrac{\square}{\square}$이다.

따라서, 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\square\times\dfrac{\square}{\square}=\dfrac{\square}{\square}$

대표유형 점과 직선 사이의 거리

1. 점 $(-2,\ 3)$과 직선 $3x-4y+a=0$ 사이의 거리가 3일 때, 상수 a의 값을 모두 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 점 $\mathrm{P}(k,\ 0)$과 직선 $x+3y+4=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오,

대표유형 원점과 직선 사이의 거리

2. 직선 $2x+4y-3=0$에 평행하고 원점에서 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 직선 $4x+3y-5=0$에 수직이고, 원점으로부터의 거리가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

대표유형 평행한 두 직선 사이의 거리(1)

3. 평행한 두 직선 $ax-2y+1=0$, $x+2y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$가 되도록 하는 상수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $b>0$)

쌍둥이유형

3-1. 평행한 두 직선 $x-3y+a=0$, $x-3y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여, $|a-b|$의 값을 구하시오.

대표유형 평행한 두 직선 사이의 거리(2)

4. 두 직선 $l : 2x+3y=6$, $m : 4x+6y=25$에 대하여, 직선 l 위의 한 점 P와 직선 m 위의 한 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 두 직선 $l : \frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$, $m : \frac{x}{8}-\frac{y}{10}=\frac{81}{80}$에 대하여, 직선 l 위의 한 점 P와 직선 m에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

문제 5 ●●○

세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 2),\ \mathrm{C}(4,\ -7)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

문제 6 ●●●

두 직선 $3x+2y=7,\ 4x-2y=0$의 교점을 지나는 직선 중에서 점 $(1,\ 7)$에서 거리가 최대인 직선의 방정식을 구하시오.

6

도형의 방정식(2)

6-0 중학교 개념으로 확인하기
6-0 중학교 문제로 다지기
6-1 원의 방정식
6-2 원과 직선의 위치관계
6-3 평행이동
6-4 대칭이동

수학 도움닫기
6-0

중학교 개념으로 확인하기

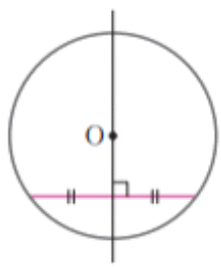
원의 성질 (중3)

1. 원과 직선

(1) 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이에서의 관계

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

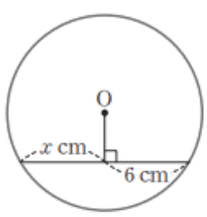
② 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.



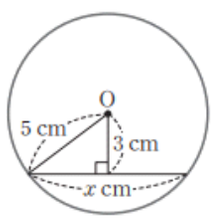
〈스스로 확인하기〉

확인1〉 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



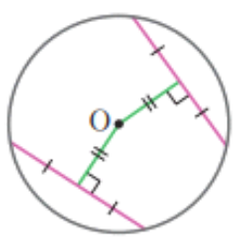
(2)



(2) 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이 관계

① 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다

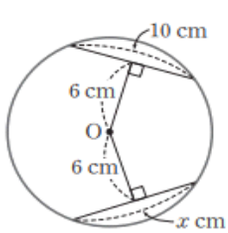
② 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.



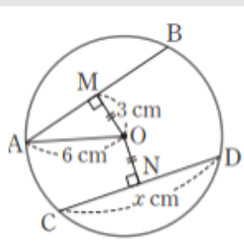
〈스스로 확인하기〉

확인2〉 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



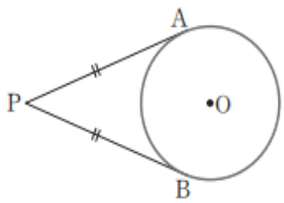
(2)



(3) 원과 접선의 길이 사이의 관계

① 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이다.

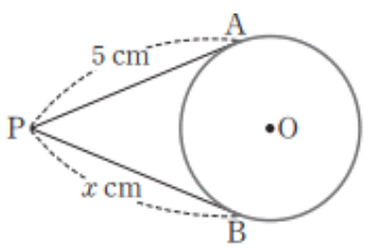
② 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.



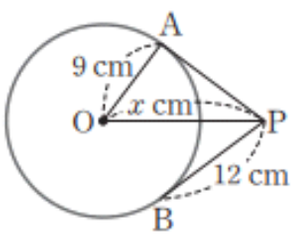
〈스스로 확인하기〉

확인3〉 다음 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. x의 값을 구하시오.

(1)



(2)

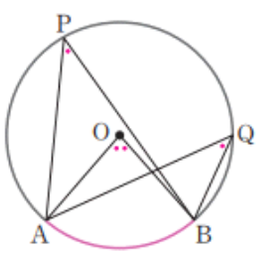


2. 원주각

(1) 중심각과 원주각 사이의 관계

① 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

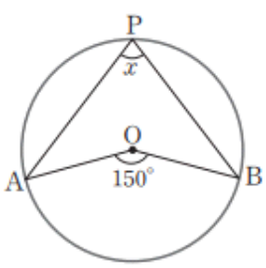
② 한 호에 대한 모든 원주각의 크기는 같다.



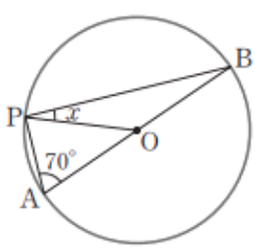
〈스스로 확인하기〉

확인4〉 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)



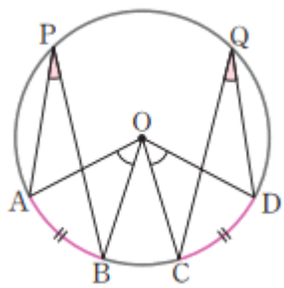
(2)



(2) 한 원에서 원주각과 호의 길이의 관계

① 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같다.

② 한 원에서 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 서로 같다.



Tip. 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례하므로 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

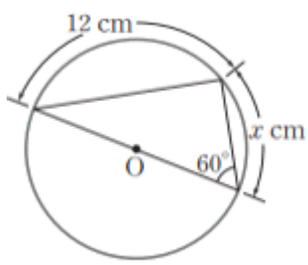
〈스스로 확인하기〉

확인5〉 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



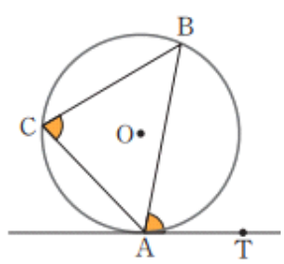
(2)



(3) 원의 접선과 현이 이루는 각에 대한 관계

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

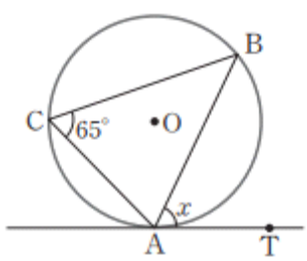
$\angle BAT = \angle BCA$



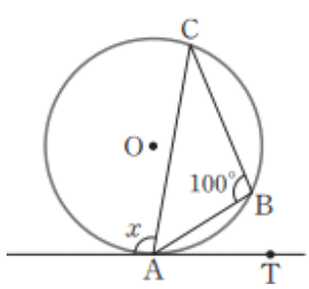
〈스스로 확인하기〉

확인6〉 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

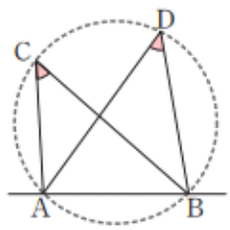
(1)



(2)



3. 내접사각형



(1) 네 점이 한 원 위에 있을 조건

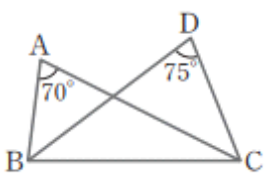
두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있을 때,

$\angle ACB = \angle ADB$ 이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

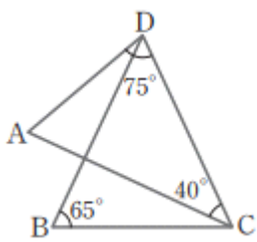
〈스스로 확인하기〉

확인7〉 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는지 판단하시오.

(1)



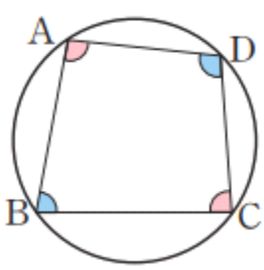
(2)



(2) 원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 내각의 크기의 합은 180^o이다.

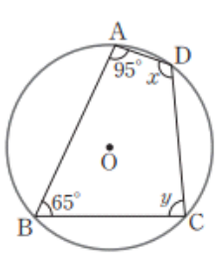
$\angle A + \angle C = 180^o$, $\angle B + \angle D = 180^o$



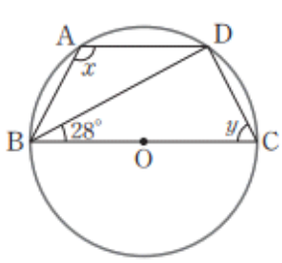
〈스스로 확인하기〉

확인8〉 다음 그림과 같이 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 구하시오.

(1)



(2)

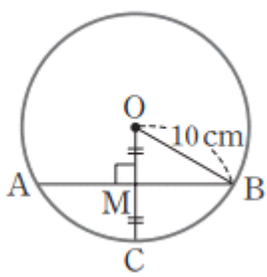


수학 도움닫기
6-0

중학교 문제로 다지기

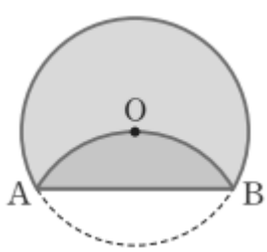
문제 1

반지름의 길이가 10cm인 원 O에서 $\overline{AB} \perp \overline{OC}$, $\overline{OM} = \overline{CM}$일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.



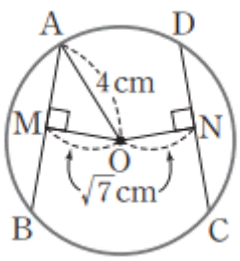
문제 2

반지름의 길이가 4cm인 원 모양의 종이를 접어서 접힌 부분의 호가 원의 중심 O를 지나도록 한 것이다. 이때 $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.



문제 3

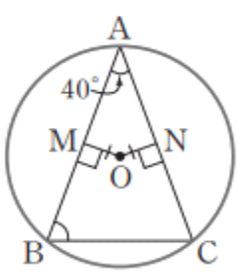
원 O에서 $\overline{AB} \perp \overline{OM}$, $\overline{CD} \perp \overline{ON}$이고 $\overline{OA} = 4\text{cm}$, $\overline{OM} = \overline{ON} = \sqrt{7}\,\text{cm}$일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하시오.



문제 4

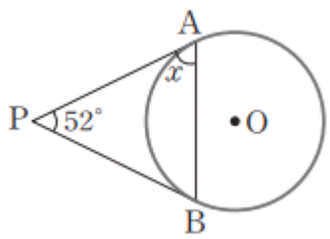
원 O에서 $\overline{AB} \perp \overline{OM}$, $\overline{ON} \perp \overline{AC}$이고 $\overline{OM} = \overline{ON}$이다.

$\angle BAC = 40^\circ$ 일 때, $\angle ABC$의 크기를 구하시오.



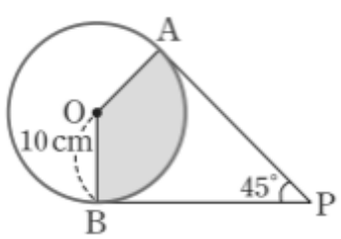
문제 5

$\overline{PA}$와 $\overline{PB}$는 원 O의 접선이고 두 점 A, B는 접점이다. $\angle P = 52^{\circ}$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하시오.



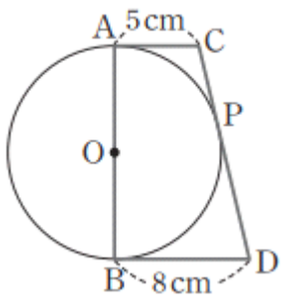
문제 6

$\overline{PA}$와 $\overline{PB}$는 원 O의 접선이고 두 점 A, B는 접점이다. $\angle P = 45^{\circ}$, $\overline{OB} = 10\text{cm}$일 때, 색칠한 부채꼴의 호의 길이를 구하시오.



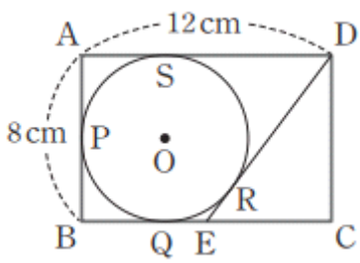
문제 7

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$는 각각 세 점 A, B, P를 접점으로 하는 원 O의 접선이다. $\overline{AC}=5\text{cm}$, $\overline{BD}=8\text{cm}$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하시오.



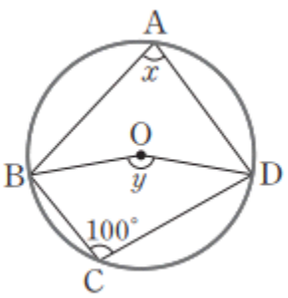
문제 8

원 O는 직사각형 ABCD의 세 변에 접하고 $\overline{DE}$와 점 R에서 접한다. $\overline{AB}=8\text{cm}$, $\overline{AD}=12\text{cm}$일 때, $\triangle DEC$의 둘레를 구하시오.



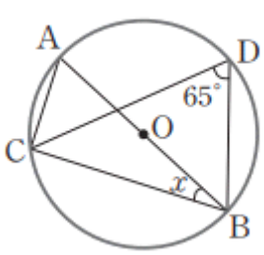
문제 9

□ABCD는 원 O에 내접한다. $\angle BCD = 100^{\circ}$ 일 때, $\angle x + \angle y$의 크기를 구하시오.



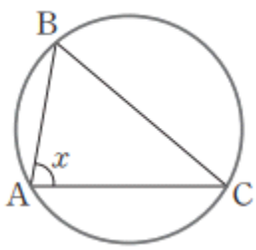
문제 10

$\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\angle CDB = 65^{\circ}$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.



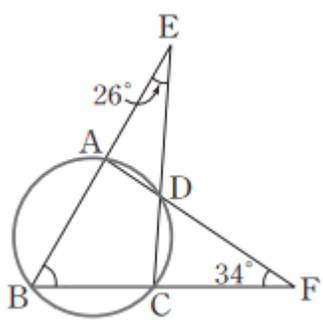
문제 11

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 2 : 4 : 3$ 일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오



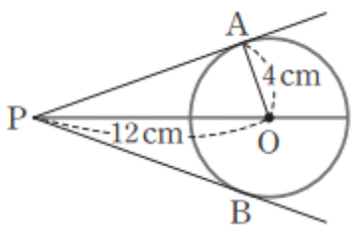
문제 12

□ABCD가 원에 내접하고 $\angle E = 26^\circ$, $\angle F = 34^\circ$ 일 때, $\angle ABC$의 크기를 구하시오.



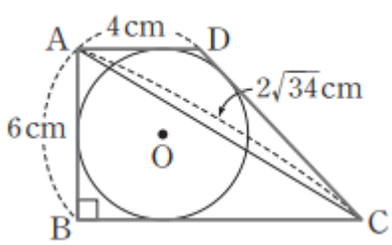
문제 13

$\overline{PA}$와 $\overline{PB}$는 각각 두 점 A, B를 접점으로 하는 원 O의 접선이다. $\overline{PO}=12\text{cm}$, $\overline{AO}=4\text{cm}$ 일 때, $\overline{PB}$의 길이를 구하시오.



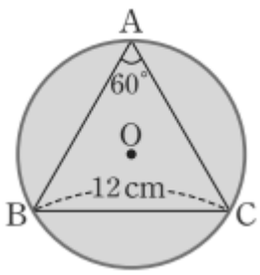
문제 14

원 O는 □ABCD에 내접한다. $\angle B=90^{\circ}$이고 $\overline{AB}=6\text{cm}$, $\overline{AC}=2\sqrt{34}\,\text{cm}$, $\overline{AD}=4\text{cm}$ 일 때, $\overline{DC}$의 길이를 구하시오.



문제 15

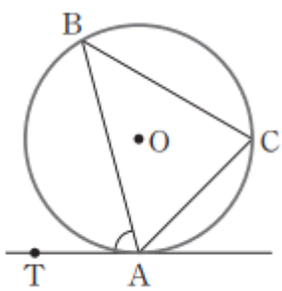
$\angle A = 60^{\circ}$, $\overline{BC} = 12\text{cm}$인 $\triangle ABC$가 원 O에 내접할 때, 원 O의 넓이를 구하시오.



문제 16

$\overline{AT}$는 원 O의 접선이고 점 A는 접점이다.

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 5 : 4 : 3$ 일 때, $\angle BAT$의 크기를 구하시오.



수학 멀리뛰기
6-1

원의 방정식

1. 원

(1) 원: 평면 위에서 한 점 O로 부터 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형

(2) 원 O로 표현

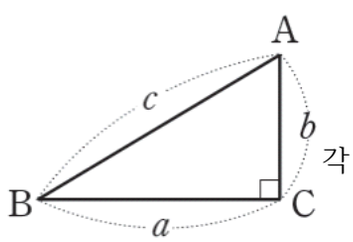
(3) 점 O: 원의 중심

(4) 원의 중심과 원 위의 한 점을 이은 선분: 원의 반지름

2. 피타고라스의 정리

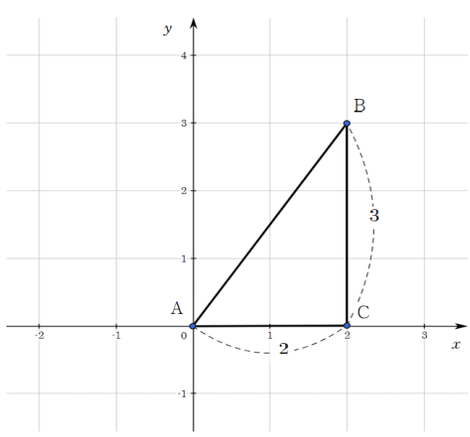
(1) 피타고라스의 정리

직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이다.



(2) 피타고라스의 정리를 활용한 좌표평면에서의 두 점 사이의 거리 구하기

1) $(0,\ 0)$과 $(2,\ 3)$ 사이의 거리 구하기



$A(0,\ 0)$, $B(2,\ 3)$ 로 두고

$\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형을 그리면

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

따라서 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{13}$ 이다.

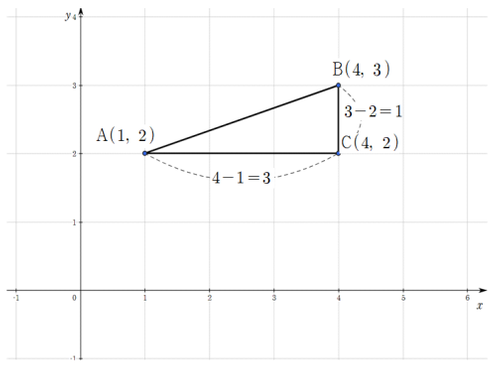
〈스스로 확인하기〉

확인1〉 좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $(0,\ 0)$과 $(3,\ 4)$

(2) $(0,\ 0)$과 $(-4,\ 5)$

2) (1, 2)과 (4, 3) 사이의 거리 구하기



A(1, 2), B(4, 3)로 두고 C(4, 2)라 하면

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형으로 그려진다.

$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

따라서 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이다.

〈스스로 확인하기〉

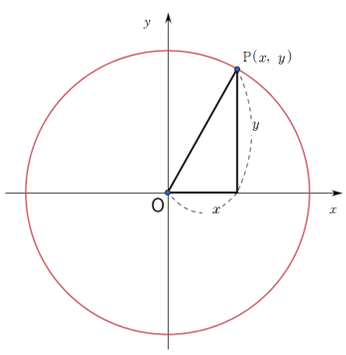
확인2〉 좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) (1, 1)과 (−3, 5)

(2) (−1, 0)과 (4, 4)

3. 원의 방정식 1 (원점을 중심으로 하는 원의 방정식)

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구해봅시다.



(1) $\overline{OP}$의 길이는 일정하다.

(2) 피타고라스의 정리를 이용한다.

(3) 반지름의 길이는 r이다.

→ $x^2 + y^2 = r^2$

〈스스로 확인하기〉

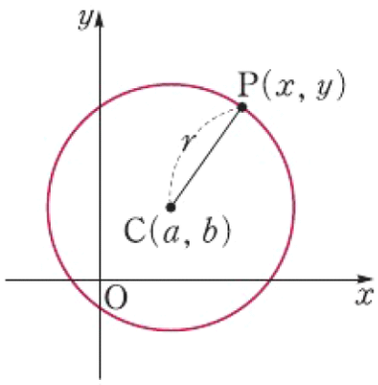
확인3〉 원의 방정식을 구하시오.

(1) (0, 0)을 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원

(2) (0, 0)을 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원

4. 원의 방정식 2 (C(a, b)를 중심으로 하는 원의 방정식)

C(a, b)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구해보자.



(1) $\overline{CP}$의 길이는 일정하다.

C(a, b), P(x, y)

(2) 피타고라스의 정리를 이용한다.

(3) 반지름의 길이는 r이다.

→ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 원의 방정식을 구하시오.

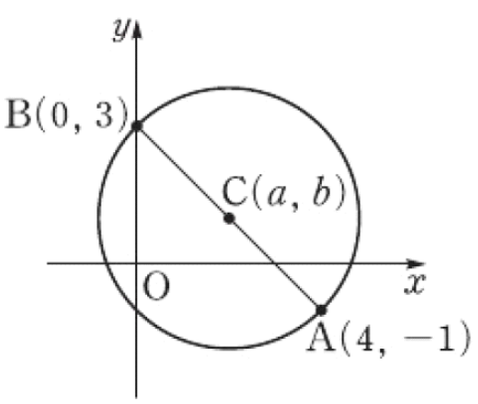
(1) (2, 3)을 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원

(2) (2, −5)을 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원

(3) (−3, 3)을 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원

4. 원의 방정식 3 (지름의 양 끝점이 주어진 원의 방정식)

두 점 A(4, −1), B(0, 3)을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구해봅시다.



(1) 원의 중심의 좌표를 구한다.

C(a, b)를 중심이라고 하면

$a = \frac{4+0}{2} = 2$, $b = \frac{-1+3}{2} = 1$

→ C(2, 1)

(2) 반지름의 길이를 구한다.

$\overline{AC} = \sqrt{(2-4)^2 + \{1-(-1)\}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(3) 방정식으로 나타낸다.

→ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

〈스스로 확인하기〉

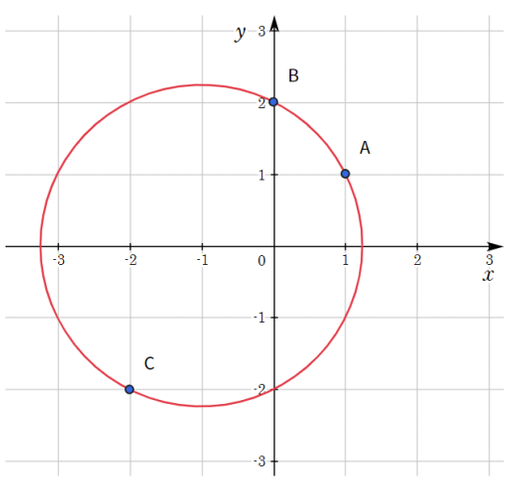
확인5〉 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) $(5,\ -1)$과 $(1,\ 3)$

(2) $(1,\ 1)$과 $(7,\ 5)$

5. 원의 방정식 4 (세 점을 지나는 원의 방정식)

세 점 $A(1,\ 1)$, $B(0,\ 2)C(-2,\ -2)$를 지나는 원의 방정식을 구해보자.



(1) 원의 중심의 좌표를 구한다.

$P(a,\ b)$를 중심이라고 하면 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$(a-1)^2+(b-1)^2=(a-0)^2+(b-2)^2$

$\rightarrow \quad a-b+1=0 \quad \cdots\cdots①$

2) $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$(a-0)^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b+2)^2$

$\rightarrow \quad a+2b+1=0 \quad \cdots\cdots②$

①,②를 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=0$이므로 $P(-1,\ 0)$

(2) 반지름의 길이를 구한다.

$\overline{PA} = \sqrt{(1+1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{5}$

(3) 방정식으로 나타낸다.

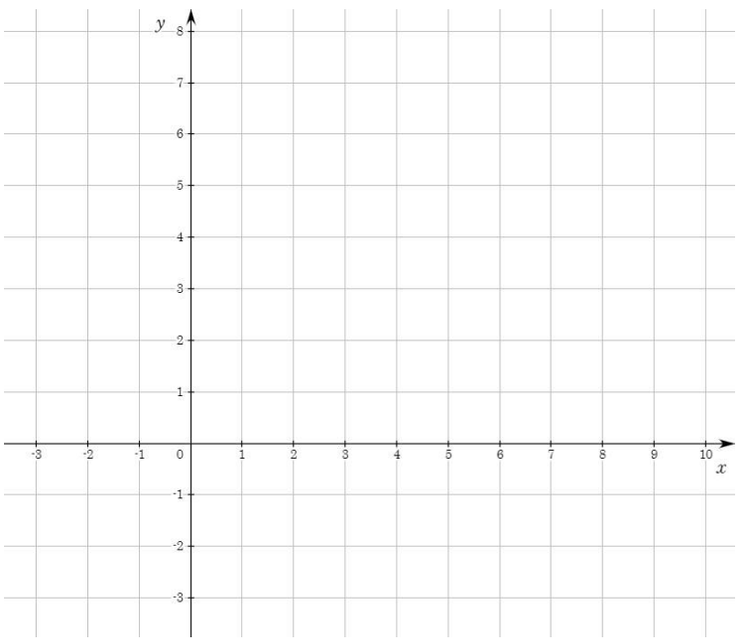
$\rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-0)^2 = 5$

$(x+1)^2 + y^2 = 5$

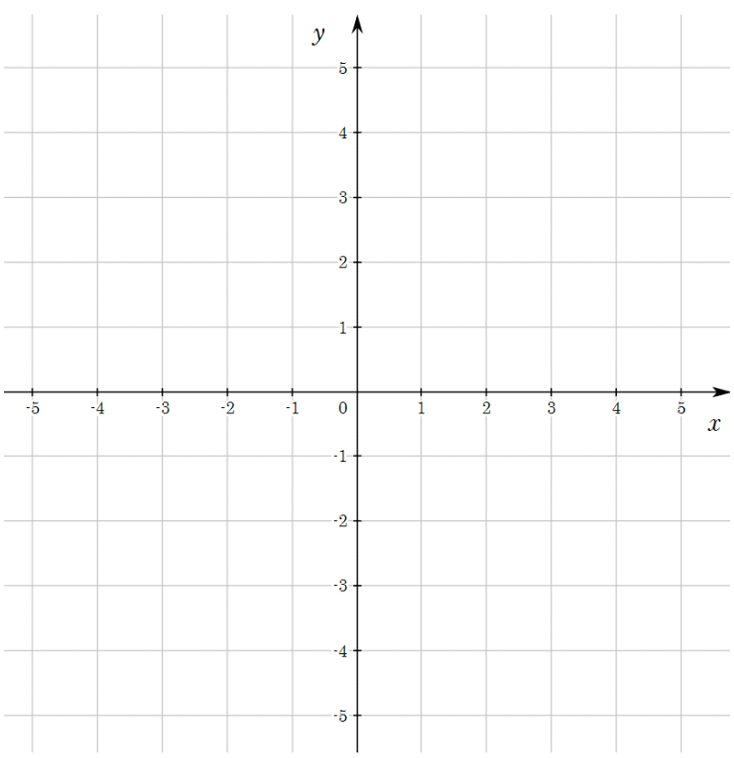
〈스스로 확인하기〉

확인6〉 세 점을 지나는 원을 좌표평면에 그려보고 원의 방정식을 구하시오.

(1) $A(0,\ 1),\ B(5,\ 0),\ C(0,\ 5)$



(2) $A(3,\ 2),\ B(-1,\ 4),\ C(-3,\ 0)$



6. 원의 방정식 5 (일반형)

☞ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 것은 무엇일까요?

(1) 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 전개해 보자.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

따라서 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은 원의 방정식이다.

Tip. 원의 방정식은 x^2과 y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

(2) 원의 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서 원의 중심과 반지름을 찾아보자.

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$x^2+Ax+y^2+By+C=0$

$$\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)+C-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}=0$$

$$\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)=-C+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$

$$\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-\frac{4C}{4}$$

$$\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

이 때 $A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은

중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$이고,

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$인 원이다.

〈스스로 확인하기〉

확인7〉 방정식 $x^2+y^2+4x+6y-11=0$이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

대표유형 원의 방정식의 표준형과 일반형

1. 중심이 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 방정식 $x^2+y^2+4x=0$이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

대표유형 조건이 주어진 원의 방정식1

2. 중심이 $(-3,\ 3)$이고, 점 $(0,\ 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 중심이 $(3,\ -4)$이고, 원점을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

대표유형 조건이 주어진 원의 방정식2

3. 두 점 $A(6,\ 1)$, $B(0,\ -3)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

3-1. 세 점 $A(5,\ 1)$, $B(7,\ -3)$, $C(-2,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

대표유형 원의 방정식이 될 조건

4. 방정식 $x^2+y^2-4x-8y+k=0$이 원을 나타내도록 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

쌍둥이유형

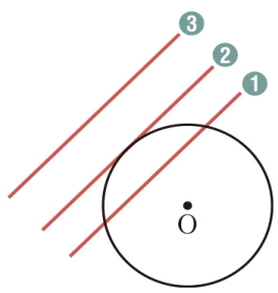
4-1. 방정식 $x^2+y^2+2ax+4ay+6a^2-5a+6=0$이 원이 되도록 하는 실수 a의 범위를 구하시오.

수학 멀리뛰기
6-2

원과 직선의 위치관계

1. 원과 직선의 위치관계

원과 직선의 위치관계는 다음 세 가지 경우가 있다.



❶ 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ 한 점에서 만난다.(접한다.)

❸ 만나지 않는다.

원과 직선의 방정식을 각각

$x^2+y^2=r^2$ ····· ①

$y=mx+n$ ····· ②

이라 할 때, 원과 직선의 교점의 개수는 방정식 ①과 ②를 모두 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

②를 ①에 대입하면

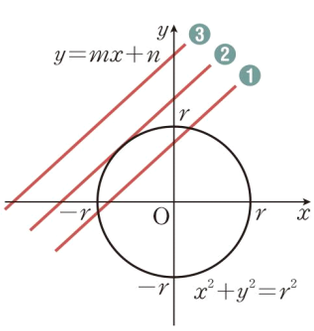
$x^2+(mx+n)^2=r^2$ 이고, 이 식을 정리하면

$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$ ····· ③ 이다.

이때 원과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ③의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

따라서 이차방정식 ③의 판별식을 D라 하면, D의 값의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

판별식 D의 값의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)

❸ $D<0$이면 만나지 않는다.

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 원 $x^2+y^2+2x=9$와 직선 $y=x+1$의 위치 관계를 말하시오.

2. 원의 접선의 방정식

<기울기가 주어진 원의 접선의 방정식>

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해보자.

구하는 직선의 방정식을

$$y=mx+n$$

이라 하고, 이것을 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$ …… ① 이다.

이차방정식 ①의 판별식을 D라 하면

$D=(2mn)^2-4(m^2+1)(n^2-r^2)=4\{r^2(m^2+1)-n^2\}$ 이다.

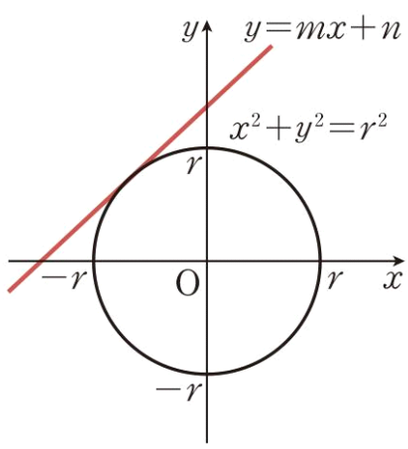
원과 직선이 접하면 $D=0$, 즉 $4\{r^2(m^2+1)-n^2\}=0$

이므로 $n^2=r^2(m^2+1)$에서

$n=\pm r\sqrt{m^2+1}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$ 이다.



〈스스로 확인하기〉

확인2〉 직선의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 1인 직선

확인3〉 직선의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 직선 $2x+y-1=0$과 평행한 직선

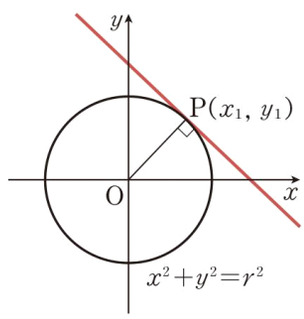
<원 위의 점에서의 접선의 방정식>

원 $x^2+y^2=r^2$위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$일 때, 점 P에서의 접선은 직선 OP와 수직이고

직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$이므로, 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이고, 이 식을 정리하면

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

이다. 여기서 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 원 위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=r^2$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2$$

〈스스로 확인하기〉

확인4〉 원 $x^2+y^2=5$에 대하여 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

확인5〉 원 $x^2+y^2=5$에 대하여 점 $(\sqrt{5},\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

대표유형 원과 직선의 위치관계

1. 원 $x^2+y^2+2x=10$와 직선 $y=x+1$의 위치 관계를 말하시오.

쌍둥이유형

1-1. 원 $x^2+y^2=15$와 직선 $x+y=5$의 위치 관계를 말하시오.

대표유형 원과 직선의 위치관계

2. 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

[서로 다른 두 점에서 만난다.]

쌍둥이유형

2-1. 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

[만나지 않는다.]

대표유형 원과 직선이 접할때

3. 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+k$가 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

3-1. 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=-x+k$가 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

대표유형 원과 직선이 접할때

4. 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=2x+k$가 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 원 $2x^2+y^2=1$과 직선 $y=-2x+k$가 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

대표유형 원의 접선의 방정식

5. 직선의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 1인 직선

쌍둥이유형

5-1. 직선의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 직선 $x-y-1=0$과 평행한 직선

대표유형 원의 접선의 방정식

6. 원 $x^2+y^2=6$에 대하여 점 $(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

6-1. 원 $x^2+y^2=6$에 대하여 점 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

대표유형 한점에서 그은 접선의 방정식

7. 점 $(0,3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

7-1. 점 $(0,4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

대표유형 한점에서 그은 접선의 방정식

8. 점 $(0,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

8-1. 점 $(0,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

대표유형 원과 두 점에서 만날 때

9. 원 $(x-2)^2+y^2=9$와 직선 $y=x+k$이 두 점에서 만날 때 실수 k의 범위를 서술하시오.

쌍둥이유형

9-1. 원 $(x+1)^2+y^2=9$와 직선 $y=-x+k$이 두 점에서 만날 때 실수 k의 범위를 서술하시오.

대표유형 원과 만나지 않을 때

10. 원 $(x+2)^2+y^2=4$와 직선 $y=2x+k$이 만나지 않을 때, 실수 k의 범위를 서술하시오.

쌍둥이유형

10-1. 원 $(x-2)^2+y^2=4$와 직선 $y=x-k$이 만나지 않을 때, 실수 k의 범위를 서술하시오.

수학 멀리뛰기

6-3 평행이동

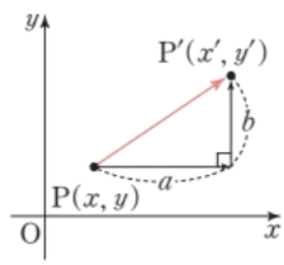
※ 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 평행이동이라고 한다.

1. 점의 평행이동

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면

$$x' = x + a,\ y' = y + b$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}'(x', y') = \mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$이다.



예) 점 $(2, -3)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점은 $(2+1, -3+2)$이다. 즉 $(3, -1)$이다.

〈스스로 확인하기〉

확인1〉 점 $(0, 0)$을 다음과 같이 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점

(2) x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점

확인2〉 다음에 제시한 점을 평행이동에 의해 $(0, 0)$으로 이동하려고 한다. 얼마나 이동해야 하는지 빈 칸을 채우시오.

(1) 점 $(-2, 1)$을 x축의 방향으로 ☐만큼, y축의 방향으로 ☐만큼 평행이동한다.

(2) 점 $(3, -5)$를 x축의 방향으로 ☐만큼, y축의 방향으로 ☐만큼 평행이동한다.

점의 평행이동

점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점은

$$\mathrm{P}'(x+a, y+b)$$

2. 도형의 평행이동

좌표평면에서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구해보자.

오른쪽 그림과 같이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면

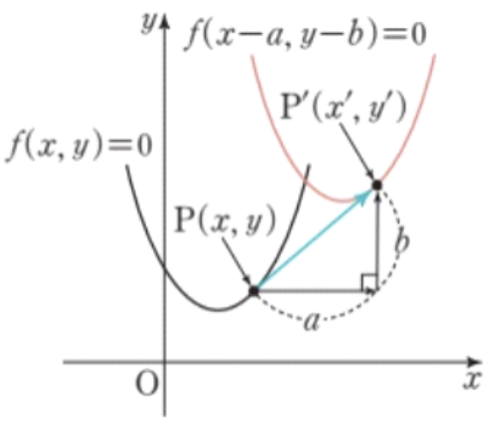
$$x'=x+a,\ y'=y+b$$

이므로 $x=x'-a,\ y=y'-b$이다.

이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면 $f(x'-a, y'-b)=0$

이므로 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 방정식 $f(x-a, y-b)=0$이 나타내는 도형 위의 점이다.

따라서 구하는 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이다.



※ $\mathrm{P}(x, y)$와 $\mathrm{P}'(x', y')$을 구분하기 위해 썼던 (′)기호는 도형의 방정식의 일반적인 형식에 따라 (′)기호를 생략하고 쓴다.

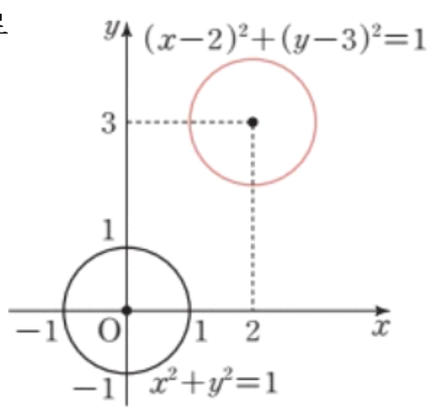
예) 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 찾아보자.

이것은 원의 중심 $(0, 0)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하였다고 생각할 수 있는데, 그러면 중심의 좌표가 $(2, 3)$이 되고 반지름의 길이는 그대로 1이므로, 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-3)^2=1$$

이라 할 수 있다.

그런데 이는 원 $x^2+y^2=1$의 방정식에서 x에 $x-2$를, y에 $y-3$을 대입한 것과 같다.



예) 이차함수의 그래프 $y=x^2$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것은 $y-2=(x-5)^2$ 이므로 $y=(x-5)^2+2$ 이다.

이는 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$에서 $(5, 2)$로 평행이동하였다고 볼 수 있으므로 평행이동에 의한 포물선의 방정식임을 확인할 수 있다.

예) 직선 $y=x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y-4=x-3$ 이므로 이를 정리하면 $y=x+1$이다.

이를 확인하기 위해 직선 $y=x$ 위의 두 점 $(0, 0)$과 $(1, 1)$을 각각 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점은 $(3, 4)$, $(4, 5)$인데 이 두 점은 모두 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 평행이동한 직선의 방정식임을 확인할 수 있다.

도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

〈스스로 확인하기〉

확인3〉 주어진 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하고 그 도형 위의 한 점$(0, 0)$도 같이 평행이동하였는지 확인하시오.

(1) $y=3x$ →

$(0, 0)$ →

평행이동한 점이 평행이동한 도형 위에 있는지 확인

(2) $y=-2(x-2)^2+8$ →

$(0, 0)$ →

평행이동한 점이 평행이동한 도형 위에 있는지 확인

(3) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ →

$(0, 0)$ →

평행이동한 점이 평행이동한 도형 위에 있는지 확인

대표유형 점의 평행이동

1. 다음 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(4,\ -2)$

(2) $(-6,\ 8)$

쌍둥이유형

1-1. 다음 점을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(5,\ -2)$

(2) $(-4,\ 4)$

대표유형 점의 평행이동

2. 점 $(a,\ 2)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ b)$일 때, $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 점 $(a,\ 2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ b)$일 때, $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

대표유형 도형의 평행이동 (직선)

3. 직선 $3x-4y+5=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

3-1. 직선 $y=3x-2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구하시오.

대표유형 도형의 평행이동 (포물선)

4. 포물선 $y=2x^2-4x+5$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 포물선 $y=x^2+4x-2$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

대표유형 도형의 평행이동 (원)

5. 원 $x^2+y^2-4x-6y+5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $(x-5)^2+(y+2)^2=c$가 되었다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

5-1. 원 $x^2+y^2+4x-8y+11=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $(x-5)^2+(y+2)^2=c$가 되었다. 이때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

대표유형 점의 이동과 도형의 이동

6. 점 $(2,\ 3)$을 $(-1,\ 5)$로 이동시키는 평행이동에 의해 $y=x^2+4x-3$을 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

쌍둥이유형

6-1. 점 $(4,\ 0)$을 $(-1,\ 3)$으로 이동시키는 평행이동에 의해 $y=2x^2-x-5$를 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

수학 도움닫기
6-4

대칭이동

1. 대칭이동한 점의 좌표

(1) 좌표평면 위의 한 점 또는 도형을 어떤 점이나 직선에 대하여 대칭인 점 또는 도형으로 옮기는 것을 각각 그 점 또는 그 직선에 대한 대칭이동이라고 한다.

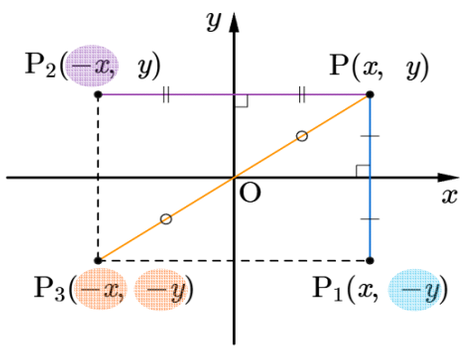
(2) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를

x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}_1(x, -y)$,

y축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}_2(-x, y)$,

원점에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}_3(-x, -y)$

이다.



(3) 한편 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면 직선 $y=x$는 선분 PP'의 수직이등분선이다.

(ⅰ) 선분 PP'의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

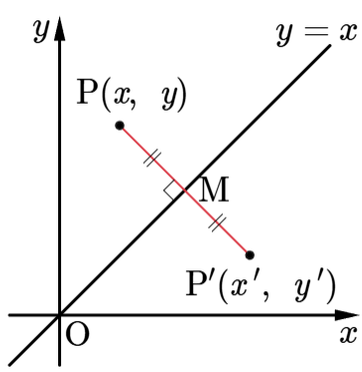
$$\frac{x+x'}{2}=\frac{y+y'}{2},\ x'-y'=y-x \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅱ) 선분 PP'과 직선 $y=x$는 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}\times 1=-1,\ x'+y'=x+y \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x'=y,\ y'=x$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}'(y, x)$이다.



〈스스로 확인하기〉

확인1〉 점 $(1, 3)$을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) x축

(2) y축

(3) 원점

(4) 직선 $y=x$

확인2〉 빈칸에 알맞은 것을 쓰시오.

(1) 점 $(-1, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(\square, \square)$이다.

(2) 점 $(-3, 4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(\square, \square)$이다.

2. 대칭이동한 도형의 방정식

(1) 오른쪽 그림과 같이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면

$$x'=x,\ y'=-y$$

이므로

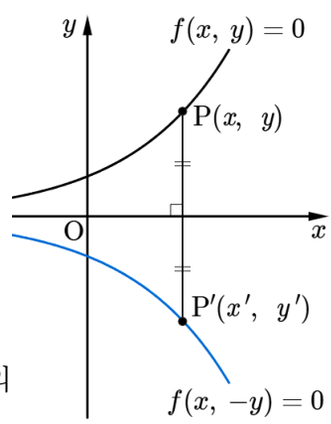
$$x=x',\ y=-y'$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면

$$f(x',\ -y')=0$$

이므로 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형 위의 점이다.

따라서 구하는 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$이다.



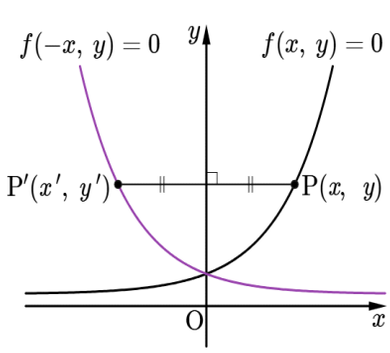
[x축에 대한 대칭이동]

같은 방법으로 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

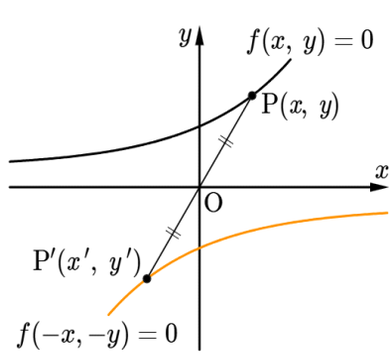
y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$,

원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$,

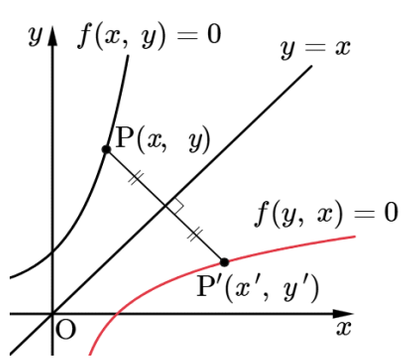
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$ 이다.



[y축에 대한 대칭이동]



[원점에 대한 대칭이동]



[직선 $y=x$에 대한 대칭이동]

(2) x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

① x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

② y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$

3. 대칭이동한 도형의 예시

(1) 직선의 대칭이동

직선 $2x+y-1=0$을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

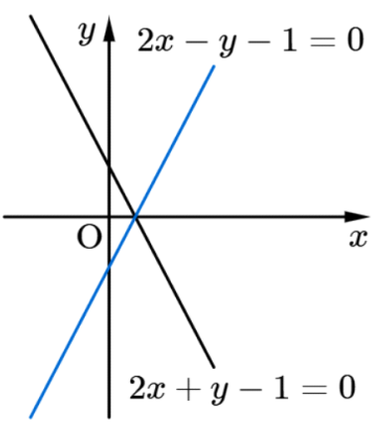
x축: $2x-y-1=0$,

y축: $-2x+y-1=0$,

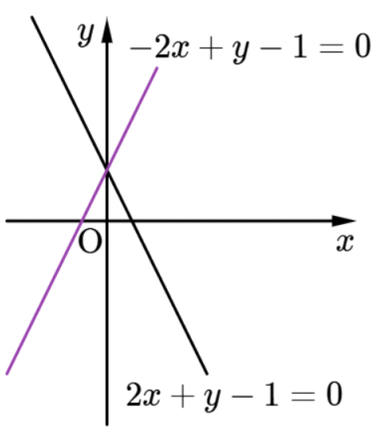
원점: $-2x-y-1=0$,

직선 $y=x$: $2y+x-1=0$ 이다.

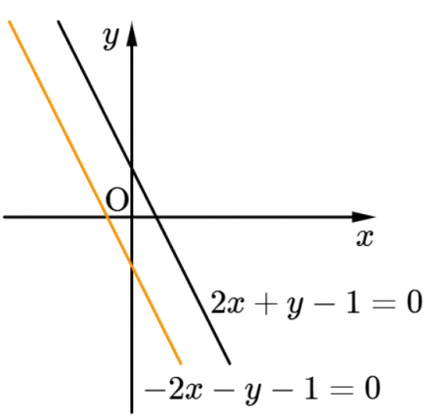
따라서 이를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



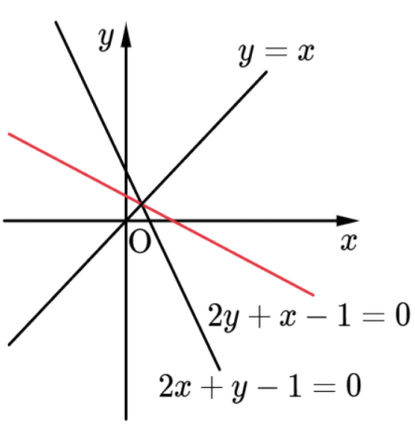
[x축에 대한 대칭이동]



[y축에 대한 대칭이동]



[원점에 대한 대칭이동]



[직선 $y=x$에 대한 대칭이동]

(2) 원의 대칭이동

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

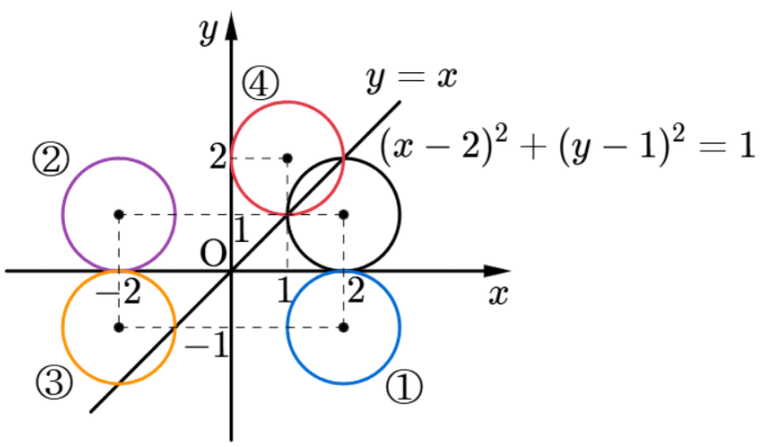
x축: $(x-2)^2+(-y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y+1)^2=1$, …… ①

y축: $(-x-2)^2+(y-1)^2=1$, $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, …… ②

원점: $(-x-2)^2+(-y-1)^2=1$, $(x+2)^2+(y+1)^2=1$, …… ③

직선 $y=x$: $(y-2)^2+(x-1)^2=1$, $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ …… ④

이다. 따라서 이를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



〈스스로 확인하기〉

확인3〉

(1) 직선 $x-2y+1=0$을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

x축	
y축	
원점	
직선 $y=x$	

(2) 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

x축	
y축	
원점	
직선 $y=x$	

대표유형 대칭이동한 점의 좌표

1. 점 $(2a-1,\ a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 $y=3x+1$ 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

1-1. 점 $(2a,\ 4a+1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점이 이차함수 $y=x^2$ 그래프 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

대표유형 대칭이동한 도형의 방정식

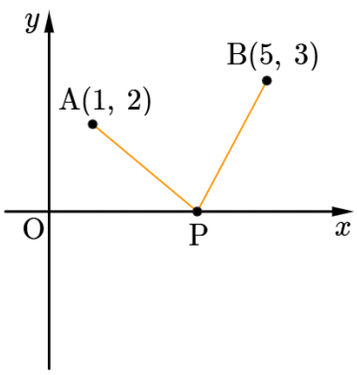
2. 직선 $y=ax-3$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 원래의 직선과 일치할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

2-1. 중심의 좌표가 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 k인 원을 x축에 대하여 대칭이동하면 점 $(2, -1)$을 지난다. 이때, 양수 k의 값을 구하시오.

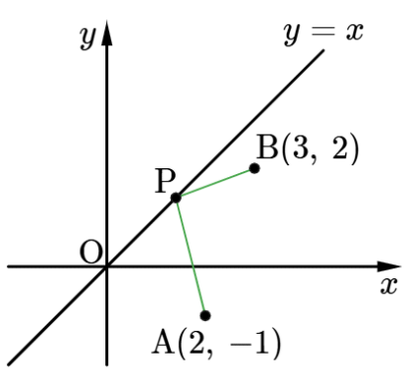
대표유형 대칭이동의 활용 (1)

3. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 3)$과 x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.



쌍둥이유형

3-1. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.



대표유형 대칭이동의 활용 (2)

4. 직선 $x-3y+1=0$을 y축에 대하여 대칭이동 하였더니 원 $(x-2)^2+(y-a)^2=4$의 넓이를 이등분하였다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

쌍둥이유형

4-1. 직선 $2x+3y-2=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-a)^2+(y+2)^2=9$의 넓이를 이등분하였다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

7

정답



1 다항식

1-0 중학교 개념으로 확인하기

스스로 확인하기 p.8~17

1. (1) $-2a^3b^2$ (2) $x+0.1y$

2. (1) $-\frac{2}{a}$ (2) $\frac{x+y}{3}$

3. (1) $\frac{a}{bc}$ (2) $2x-\frac{3}{y}$

4. (1) 19 (2) 5

5. (1) 항: $3a$, -5 상수항: -5 계수: 3
   (2) 항: $-4x$, 9 상수항: 9 계수: -4

6. (1) 1 (2) 1
   (3) 2 (4) 2
   일차식: (1), (2)

7. (1) $-24a$ (2) $-4x$

8. (1) $-6a-21$ (2) $-6x+12$

9. (1) $3a$ (2) $-4a+3$

10. (1) $4x+4$ (2) $a-2$

11. (1) $x+5$ (2) $-x+8$

12. (1) 2^9 (2) a^9 (3) $x^{10}y^9$

13. (1) a^{18} (2) 2^{23} (3) a^9b^{12}

14. (1) 5^4 (2) 1 (3) $\frac{1}{x^6}$

15. (1) $9a^2$ (2) $-\frac{a^3}{8}$ (3) $\frac{1}{8}$

16. (1) $12a^2$ (2) $18x^2y^3$

17. (1) $2a^8$ (2) $9a^4$

18. (1) $6a^2$ (2) x^3y^2

19. (1) $11a-3b$ (2) $x-y+4$

20. (1) $-6a^2-9ab$ (2) $2x^2-3xy$

21. (1) $12a+18b$ (2) $4xy-x+3y$

22. (1) $4a^2+4a+1$ (2) x^2+6x+9
    (3) a^2-4a+4 (4) $9x^2-12xy+4y^2$
    (5) a^2-9 (6) x^2-4y^2
    (7) a^2+5a+6 (8) x^2+2x-3
    (9) $6a^2-a-1$ (10) $6x^2-xy-2y^2$

23. (1) $(a+2)^2$ (2) $(x+6)^2$
    (3) $(a-5)^2$ (4) $(x-3)^2$
    (5) $(a+5)(a-5)$ (6) $(2x+3y)(2x-3y)$
    (7) $(x-3)(x+2)$ (8) $(x+2)(x+3)$
    (9) $(a+2)(3a+1)$ (10) $(3x-2)(x-2)$

1-0 중학교 문제로 다지기

중학교 문제로 다지기 p.18~25

1. 2 2. ②

3. (1) $(3a+1)^2=9a^2+6a+1$
   (2) $(2x+1)(x+5)=2x^2+11x+5$

4. $x+3$, $x-2$

5. $25-6x$. 13℃ 6. $7x-14$

7. ㉠: x^6, ㉡: x^3 8. $a=6$, $b=6$, $c=12$

9. $a=3$, $b=3$, $c=1$

10. $k=7$ 또는 $k=-\frac{19}{3}$

11. 36

12. A: 6800, B: 18000

13. $3a+1$, 61

14. $\frac{9b}{a^3}$

15. 9

16. $x=10$, 소수 7

1.

A $=1$, B $=-2$, C $=3$이므로, A $+$ B $+$ C $=2$

2.

① $(x^3)^3=x^{3\times3}=x^9$

③ $x^2\div x^6=\frac{1}{x^{6-2}}=\frac{1}{x^4}$

④ $(x^4)^3\div x^2=x^{4\times3-2}=x^{10}$

⑤ $(-2x^2y)^3=(-2)^3x^{2\times3}y^{1\times3}=-8x^6y^3$

3. (1) $(3a+1)^2=9a^2+6a+1$

(2) $(2x+1)(x+5)=2x^2+11x+5$

4.

$x+3$, $x-2$

5.

현재 기온이 25 ℃이고, 지면에서 1 km씩 높아질 때마다 기온은 6 ℃씩 낮아지므로, 높이가 x km인 곳의 기온은 $25-6x$이다.

$x=2$를 대입하여 나온 식의 값은 $25-6\times2=13$이므로, 높이가 2 km인 곳의 기온은 13℃이다.

6.

$$\begin{aligned}2A-B&=2(2x-5)-(-3x+4)\\&=4x-10+3x-4\\&=7x-14\end{aligned}$$

7.

$x^2\times x^5\times x^8=x^{15}$이고, $x^4\times x^5=x^9$이므로,

㉠은 x^6이고, $x^4\times x^8=x^{12}$이므로, ㉡은 x^3이다.

8.

$\left(\frac{2}{5^a}\right)^3=\frac{2^3}{5^{3a}}=\frac{2^3}{5^{18}}$, $3a=18$이므로, $a=6$이다.

$\left(\frac{7^6}{3^3}\right)^2=\frac{7^{6\times2}}{3^{3\times2}}=\frac{7^{12}}{3^6}$이므로, $b=6$, $c=12$이다.

9.

$(2x-a)(bx+5)=2bx^2+(10-ab)x-5a$

$2bx^2+(10-ab)x-5a=6x^2+cx-15$일 때,

$-5a=-15$, $2b=6$, $10-ab=c$

$a=3$, $b=3$, $c=10-3\times3=1$

10.

이차항의 계수가 4, 상수항이 25이므로

$4x^2+(3k-1)x+25=(2x+5)^2$ 또는

$4x^2+(3k-1)x+25=(2x-5)^2$이다.

$3k-1=20$ 또는 $3k-1=-20$이므로,

$k=7$ 또는 $k=-\frac{19}{3}$

11.

$$x=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$$

$$y=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}x^2+2xy+y^2&=(x+y)^2\\&=\{(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})\}^2\\&=6^2\\&=36\end{aligned}$$

12.

A의 넓이는

$117^2-83^2=(117+83)(117-83)=200\times34=6800$

B의 넓이는

$145^2-55^2=(145+55)(145-55)=200\times90=18000$

13.

(1) 첫 번째 정사각형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는 4, 두 번째는 3을 추가하여 7이다. 같은 방법으로 세 번째는 3을 추가하여 10이 되므로 정사각형이 하나씩 늘어날 때마다 성냥개비의 수는 3이 증가한다. 따라서, 필요한 성냥개비의 수는 $3a+1$이다.

(2) $a=20$을 대입하면, $3\times20+1=61$이므로, 필요한 성냥개비의 수는 61이다.

14.

원기둥의 부피는 $\left(\frac{3b}{a}\right)^2\pi\times4a^2b=36b^3\pi$

원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\times(ab)^2\pi\times12a=4a^3b^2\pi$이므로

$36b^3\pi\div4a^3b^2\pi=\frac{36b^3\pi}{4a^3b^2\pi}=\frac{9b}{a^3}$

15.

$x^2+6x+k=(x+a)(x+b)$이므로

$a+b=6,\ ab=k$이다.

k가 가장 큰 정수가 되려면 k는 양수, 즉, a, b는 같은 부호이어야 한다.

그러므로, $(a,\ b)$의 순서쌍을 구하면$(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$의 세 가지가 나온다. $(1,\ 5)$일 때, $k=5$, $(2,\ 4)$일 때, $k=8$, $(3,\ 3)$일 때, $k=9$이므로, k가 될 수 있는 가장 큰 정수는 9이다.

16.

$x^2-12x+27$

$x^2-12x+27=(x-3)(x-9)$이고 $x-3>x-9$이므로

$x-9=1$이어야 한다.

$x=10$이고 $x-3=10-3=7$이므로, $7\times1=7$은 소수이다.

1-1 다항식의 연산

스스로 확인하기 p.26~30

1. (1) $5x^2y,\quad y^2+1$ (2) $2x,\quad x^3$

2. (1) $2x^3+x^2y-6xy^2+3y^3-1$

(2) $2x^3-1+x^2y-6xy^2+3y^3$

3. (1) 4, 10, 4, 4, 3, 10, 4, 4, 2, 7, 6, 2

(2) 3, 9, 12, 6, 2, 9, 5, 12, 2, 6, -7, 17, 8

4. (1) $4x^2-11xy+y^2$

(2) $-3x^2-8xy+8y^2$

5. $4x^2+5x+4$

6. (1) x^3+x^2+2x+8

(2) $2x^2-2xy-4y^2-7x+11y+3$

7. (1) $-2c$, 4, 2, 4, 4

(2) $x^2+9y^2+z^2-6xy-6yz+2zx$

(3) x, $3y$, $3y$, 9, 27, 27

(4) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$

(5) a, $2b$, a, $8b^3$

(6) $8x^3+y^3$

8. (1) $2x^2,\ 3x^2,\ 3x^2,\ 6x,\ 2x,\ 2x,\ 4,\ 9$

몫: $2x^2+3x+2$ 나머지: 9

(2) 몫: x^2-x+3 나머지: -13

9.

-3	1	2	0	-4
		-3	3	-9
	1	-1	3	-13

몫: x^2-x+3 나머지: -13

대표유형 및 쌍둥이유형 p.31~38

1. $7x-5$ **1-1.** x^3-5x^2+2x-4

2. x^2-2xy **2-1.** $x^3+2x^2-6x-14$

3. ② **3-1.** ⑤

4. ㄷ, ㄹ **4-1.** ③

5. 63 **5-1.** -4

6. ④ **6-1.** ⑤

7. x^2-x+3 **7-1.** -4

8. ④ **8-1.** $2x^3+5x^2-12x+2$

1.

$$\begin{aligned}2A-B&=2(x^2+3x-2)-(2x^2-x+1)\\&=2x^2+6x-4-2x^2+x-1\\&=(2-2)x^2+(6+1)x+(-4-1)\\&=7x-5\end{aligned}$$

1-1.

$$\begin{aligned}A-2B&=(3x^3-x^2-2)-2(x^3+2x^2-x+1)\\&=3x^3-x^2-2-2x^3-4x^2+2x-2\\&=(3-2)x^3+(-1-4)x^2+2x+(-2-2)\\&=x^3-5x^2+2x-4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A+2B)-(B+C)&=A+2B-B-C\\&=A+B-C\\&=(x^2-xy+2y^2)+(x^2-y^2)-(x^2+xy+y^2)\\&=x^2-xy+2y^2+x^2-y^2-x^2-xy-y^2\\&=x^2+x^2-x^2-xy-xy+2y^2-y^2-y^2\\&=x^2-2xy\end{aligned}$$

2-1.

$$\begin{aligned}(A-B)-(2B-C)&=A-B-2B+C\\&=A-3B+C\\&=(-x^3+4x-2)-3(x^2+3x+4)+(2x^3+5x^2-x)\\&=-x^3+4x-2-3x^2-9x-12+2x^3+5x^2-x\\&=(-1+2)x^3+(-3+5)x^2+(4-9-1)x+(-2-12)\\&=x^3+2x^2-6x-14\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&(x^2-2x+3)(x+4)\\&=x(x^2-2x+3)+4(x^2-2x+3)\\&=x^3+(-2+4)x^2+(3-8)x+12\\&=x^3+2x^2-5x+12\end{aligned}$$

그러므로 x^2의 계수는 2이다.

3-1.

$$\begin{aligned}&(x-2y)(x^2+5xy-y^2)\\&=x(x^2+5xy-y^2)-2y(x^2+5xy-y^2)\\&=x^3+5x^2y-xy^2-2x^2y-10xy^2+2y^3\\&=x^3+(5-2)x^2y+(-1-10)xy^2+2y^3\\&=x^3+3x^2y-11xy^2+2y^3\end{aligned}$$

그러므로 x^2y의 계수는 3이다.

4.

ㄱ. $(a+2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$ (×)

$\Rightarrow (a+2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

ㄴ. $(x+2)^3=x^3+2x^2+4x+8$ (×)

$\Rightarrow (x+2)^3=x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$

ㄷ. $(a-3b)^3=a^3-9a^2b+27ab^2-27b^3$ (○)

ㄹ. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$ (○)

ㅁ. $(3a-1)(9a^2+3a+1)=9a^3-1$ (×)

$\Rightarrow (3a-1)(9a^2+3a+1)=(3a)^3-1=27a^3-1$

그러므로 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

4-1.

① $(3x-2)^3=27x^3-54x^2+36x-8$ (○)

② $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=8x^3-y^3$ (○)

③ $(x-y+3z)^2=x^2+y^2+9z^2+2xy-6yz+6zx$ (×)

$\Rightarrow (x-y+3z)^2$

$=x^2+(-y)^2+(3z)^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times 3z$

$+2\times 3z\times x=x^2+y^2+9z^2-2xy-6yz+6zx$

④ $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)=a^3+27b^3$ (○)

⑤ $(x+5y)^3=x^3+15x^2y+75xy^2+125y^3$ (○)

그러므로 옳지 않은 것은 ③ 이다.

5.

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\&=x^3+y^3+3xy(x+y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=3^3-3\times(-4)\times 3=27-(-36)=63\end{aligned}$$

그러므로 x^3+y^3의 값은 63이다.

5-1.

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$\quad = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

$\quad = 2^3 + 3 \times (-2) \times 2 = 8 + (-12) = -4$

그러므로 $x^3 - y^3$의 값은 -4이다.

6.

다항식 $3x^2 + 4x - 7$을 $x-1$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 3x-7 \\ x-1 \overline{)\,3x^2+4x-9} \\ \underline{3x^2-3x} \\ 7x-9 \\ \underline{7x-7} \\ -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad (\text{가})$$

그러므로 (가)는 $7x-9$이다.

6-1.

다항식 $2x^3 - 4x^2 + x + 1$을 $x^2 - x + 2$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2x-2 \\ x^2-x+2 \overline{)\,2x^3-4x^2+x+1} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ -2x^2-3x+1 \\ \underline{-2x^2+2x-4} \\ -5x+5 \end{array}$$

이므로 $a=2, b=5$ 이다. 그러므로 $a+b=7$이다.

7.

(1) 나눗셈 이용

$$\begin{array}{r} x^2-x-6 \\ x+1 \overline{)\,x^3 \quad -7x+3} \\ \underline{x^3+x^2} \\ -x^2-7x \\ \underline{-x^2-x} \\ -6x+3 \\ \underline{-6x-6} \\ 9 \end{array}$$

(2) 조립제법 이용

$$\begin{array}{r|cccc} -1 & 1 & 0 & -7 & 3 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 9 \end{array}$$

몫: $x^2 - x - 6$ 나머지: 9 이므로

$A = x^2 - x - 6$, $B = 9$ 이다.

그러므로 $A + B = x^2 - x + 3$ 이다.

7-1.

$$\begin{array}{r} 4x-5 \\ x^2+1 \overline{)\,4x^3-5x^2+2x-9} \\ \underline{4x^3 \quad +4x} \\ -5x^2-2x-9 \\ \underline{-5x^2 \quad -5} \\ -2x-4 \end{array}$$

나머지는 $-2x-4$ 이므로 $k = -4$이다.

8.

다항식 A를 다항식 $B(B \neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 $A = BQ + R$ 이 성립한다.

$A = (3x-1)(x^2+2) - 5$

$\quad = 3x(x^2+2) - (x^2+2) - 5$

$\quad = 3x^3 + 6x - x^2 - 2 - 5$

$\quad = 3x^3 - x^2 + 6x - 7$

이므로 ④ $3x^3 - x^2 + 6x - 7$ 이다.

8-1.

$A = (x^2+3x-5)(2x-1) + x - 3$

$\quad = 2x(x^2+3x-5) - (x^2+3x-5) + x - 3$

$\quad = 2x^3 + 6x^2 - 10x - x^2 - 3x + 5 + x - 3$

$\quad = 2x^3 + (6-1)x^2 + (-10-3+1)x + (5-3)$

$\quad = 2x^3 + 5x^2 - 12x + 2$

이므로 $A = 2x^3 + 5x^2 - 12x + 2$ 이다.

1-2 항등식의 성질, 나머지 정리

스스로 확인하기 p.39~42

1. (1), (3), (4)

2. (1) 0, 0, 0, 2, -1, 3
(2) 2, a, b, 4, -3, c, 2, 4, -3

3. (1) $-ax+3a+bx+2b$, $3x+16$, $-a+b$, $3a+2b$, 2, 5
(2) 3, -2, -2, 2, 3, 5

4. (1) 1, 1, 1, 4
(2) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$

5. (1) 2, 2, 2, 0, 3
(2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, 5

대표유형 및 쌍둥이유형 p.43~46

1. $x=7$, $y=-3$ **1-1.** $a=6$, $b=3$

2. $a=4$, $b=2$ **2-1.** $a=1$, $b=4$, $c=1$

3. ① **3-1.** $a=4$, $b=-3$

4. -21 **4-1.** 24

1.
주어진 등식의 좌변을 k에 대해 정리하면
$k(x+2y-1)+(x-y-10)=0$이고,
이 등식이 k에 대한 항등식이므로 $x+2y-1=0$, $x-y-10=0$을 만족한다. 두 식을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=-3$이다.

1-1.
주어진 등식의 좌변을 x, y에 대해 정리하면
$x(2a-3b-3)+y(a-b-3)=0$이다.
이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$2a-3b-3=0$, $a-b-2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$이다.

2.
주어진 등식의 좌변을 전개한 후 x에 대한 내림차순으로 전개하면
$x^3+(a-2)x^2+(-1-2a)x+2=x^3+bx^2-9x+2$
이다.
이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a-2=b$, $-1-2a=-9$이다.
즉, $a=4$, $b=2$이다.

2-1.
주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 적당한 수를 대입해도 등식은 성립한다.
양변에 $x=0$을 대입하면 $-2a=-2$, $a=1$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $3b=12$, $b=4$
양변에 $x=2$를 대입하면 $6c=6$, $c=1$이다.

3.
$f(x)=x^3+ax-1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $f(3)=11$이다.
즉, $f(3)=3^3+a\times3-1=27+3a-1=11$이므로
$3a=-15$, 즉 $a=-5$이다.

3-1.
$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$라고 하면, 나머지 정리에 의하여 $f(1)=4$, $f(-1)=8$이므로
$a+b=1$, $a-b=7$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=4$, $b=-3$이다.

4.
$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로 $f(x)=(x-3)Q(x)+4$이고,
$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로,
$Q(x)=(x+2)Q'(x)+5$이다. 즉, 이를 한 번에 정리하면 $f(x)=(x-3)\{(x+2)Q'(x)+5\}+4$이므로

$f(x)=(x-3)(x+2)Q'(x)+5(x-3)+4$이고,
나머지 정리에 의해 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 $f(-2)=-21$이다.

4-1.
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$,
나머지가 3이므로 $f(x)=(x-2)Q(x)+3$이다.
$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q'(x)$라 하나머지가 5이므로 $Q(x)=(x-3)Q'(x)+5$이다.
이를 한 번에 정리하면
$f(x)=(x-2)\{(x-3)Q'(x)+5\}+3$이고
$f(x)=(x-2)(x-3)Q'(x)+5(x-2)+3$
$f(x)=(x-2)(x-3)Q'(x)+5x-7$ 이다.
따라서 $xf(x)$를 $x=3$으로 나누었을 때의 나머지는 $3f(3)=3\times(5\times3-7)=3\times8=24$이다.

1-3 인수분해

스스로 확인하기 p.47~51

1. (1) x, x, $x+y$
(2) $a+1$, $a+1$, $a-1$

2. (1) a, a
(2) y, y, 2

3. (1) $a(a-4)$ (2) $ab(2+3ab)$
(3) $xy(x^2y-2)$ (4) $xy(1-4y+2x)$

4. (1) $(a-2)^2$ (2) $(a+1)(a-1)b$
(3) $(x+3)(x+2)$ (4) $y(x-1)(x-2)$

5-1. $b+c$, $b+c$, $b+c$, $b+c$

5-2. $b+2$, $b+2$, $a+b+2$

6-1. $a+b$, $a+b$, $a+b$, $a+b$, $a+b$

6-2. $a^2(a-b)-2ab(a-b)+b^2(a-b)$,
$(a-b)(a^2-2ab+b^2)$, $(a-b)^3$

7-1. a^2b, a^2-b^2, $a+b$, $a-b$

7-2. a^2b, $a^2(a-b)+b(a^2-b^2)$,
$a^2(a-b)+b(a+b)(a-b)$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

8-1. ab, a^2+b^2, ab, a^2+b^2-ab, a^2-ab+b^2

8-2. ab, $(a^2-b^2)^2-(ab)^2$,
$(a^2-b^2+ab)(a^2-b^2-ab)$,
$(a^2+ab-b^2)(a^2-ab-b^2)$

9-1. $3abc$, $(a+b)^2-(a+b)c+c^2$,
$a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2$,
$a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc$,
$a^2-2ca+c^2, b-c$

9-2. $(a+b+2)(a^2+b^2+4-ab-2b-2a)$,
$\frac{1}{2}(a+b+2)\{(a-b)^2+(b-2)^2+(2-a)^2\}$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.52~55

1. (1) $2x^2y^2(3x-2+6y)$
(2) $(a-b)(c-d)$

1-1. $a^2(3-a)+(3-a)=(a^2+1)(3-a)$

2. (1) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
(2) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

2-1. (1) $(a+2b)^3$
(2) $(a+3b)^3$

3. $(x^2-4x-4)(x^2-4x+2)$

3-1. $(x-3)(x+2)(x^2-x-8)$

4. $(x^2-2)(x+1)(x-1)$

4-1. (1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$

1-1.

$a^2(3-a)+(3-a)=(a^2+1)(3-a)$

2.

(2) $(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

3.

$(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-8$

$=(x^2-4x-4)(x^2-4x+2)$

3-1.

$(x^2-x-2)(x^2-x-12)+24$

$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+48$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-8)$

$=(x-3)(x+2)(x^2-x-8)$

4-1.

(1) $x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+x+1)(x^2-x-1)$

(2) $x^4-2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$

2 방정식과 부등식

2-0 중학교 개념으로 확인하기

스스로 확인하기 p.58~68

1. x, 6, 3, 6

2. 12, 3, $3x$, 12, 6

3. (1) $x=-3$ (2) $x=-1$

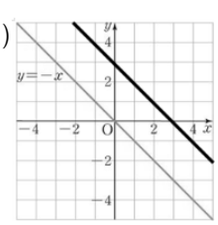
4. 7, 7, 5, $2x+5$, $x+1$, $-\frac{5}{2}$, -1

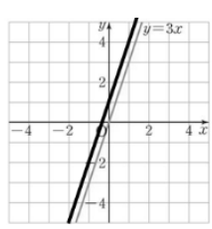
5. 1, 4, 1, $2x-1$

6. $\frac{9}{4}$, $-\frac{9}{4}$, 4, $-\frac{9}{4}$, 4, $x-2$, $\frac{7}{4}$, $x-2$, $\frac{7}{4}$, 2, $\frac{7}{4}$

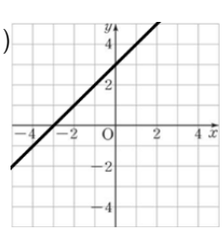
7. (1) $x=4\pm\sqrt{7}$ (2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{8}$

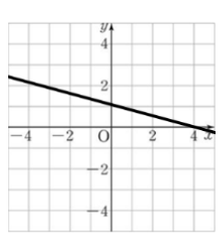
8. (1) 1 (2) -4

9. (1) 

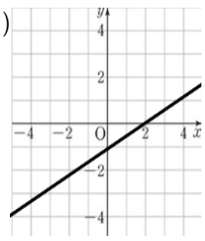
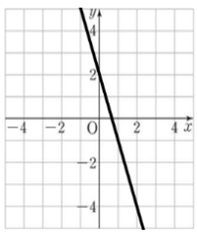
(2) 

10. (1) 3, -6 (2) 3, 12

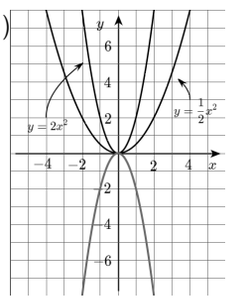
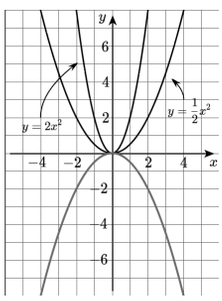
11. (1) 

(2) 

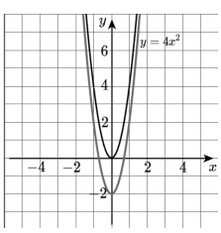
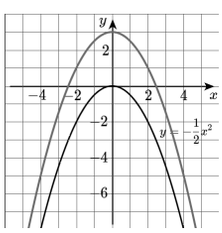
12. (1) 2, -6 (2) -4, 12

13. (1)  (2) 

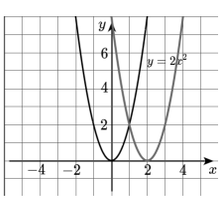
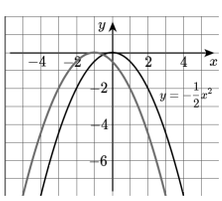
14. (1) 0, 0, $y=-\frac{2}{3}x^2$ (2) 0, 0, $y=3x^2$

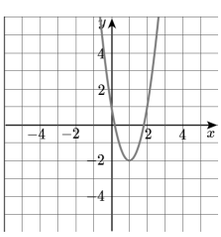
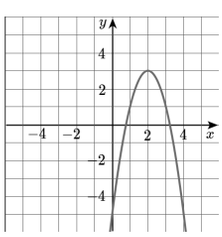
15. (1)  (2) 

16. (1) 0, -5, -5 (2) 0, 4, 4

17. (1)  (2) 

18. (1) 5, 0, 5 (2) -4, 0, -4

19. (1)  (2) 

20. (1)  (2) 

① $y=3(x-1)^2-2$ ② -2 ③ $(1,-2)$

① $y=-2(x-2)^2+3$ ② 3 ③ (2, 3)

2-0 중학교 문제로 다지기

중학교 문제로 다지기 p.69~76

1. $x=\frac{11}{2}$

2. -6

3. $a=3,\ b=8$

4. 20

5. -5

6. -5

7. 제 2사분면

8. -1

9. $y=-\frac{1}{4}x+2$

10. -1

11. -5

12. $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$

13. 3

14. 4

15. $a=-\frac{2}{3},\ b=-4,\ c=0$

16. $a=2,\ b=7$

1.

$3x-6=0.2(5x+10)+3$

$3x-6=x+5$

$2x=11$ $x=\frac{11}{2}$

2.

해가 $x=-2$이므로

$7(x+4)+ax=26$ 식에 $x=-2$식에 대입하면

$14-2a=26$에서 $a=-6$

3.

$x^2+6x+1=0$

$x^2+6x=-1$

$(x+3)^2=8$

이므로

$a=3,\ b=8$

4.

$x^2-8x+k=0$이 중근을 가지므로

$k=(-4)^2=16$

$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$x=4$

$a=4$

따라서 $a+k=20$

5.

$\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}=\frac{7x+1}{6}$ 양변에 12를 곱하면

$15x+4=2(7x+1)$ $15x+4=14x+2$

$x=-2$ 이므로 $x=-2$를 $2(3x-a)=x$에 대입하면

$2(-6-a)=-2$ $-6-a=-1$ $a=-5$

6.

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-12p}}{6}$ $9-12p=33$ $p=-2$

$q=-3$ 이므로 $p+q=-5$

7.

기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로
제 1, 3, 4분면을 지난다. 그러므로 지나지 않는
사분면은 제 2사분면이다.

8.

그래프는 y절편은 4이고 기울기는 -2 이므로
$y=-2x+4$인 그래프이다.
평행한 일차함수가 $y=ax-2$이므로 두 그래프의
기울기가 일치하다.
그러므로 $a=-2$ 이고 $y=-2x-2$의
x절편을 구하면 $0=-2x-2$, $x=-1$이므로
x절편은 -1이다.

9.

$y=-\frac{1}{2}x+4$의 그래프가 x축과 만나는 점 $(8,\ 0)$

$y=\frac{2}{3}x+2$의 그래프가 y축과 만나는 점 $(0,\ 2)$이다.

두 점 $(8,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

기울기$=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$ 이고 y절편은 2이므로

일차함수 식은 $y=-\frac{1}{4}x+2$이다.

10.

$y=ax^2+3$의 그래프가 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=a+3$ $a=-1$

11.

축의 방정식이 $x=-2$이므로 $p=-2$

$y=\frac{1}{3}(x+2)^2+q$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{3}\times 9+q$ $q=-3$ $p+q=-5$

12.

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 6)$이므로 $y=a(x-2)^2+6$
이 그래프가 $(5,\ 0)$을 지나므로

$0=a(5-2)^2+6$ $a=-\frac{2}{3}$

그러므로 $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2+6$이고 이를 전개하면

$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$

13.

$x^2-kx+k-1=0$ 이 중근을 가지므로

$(-\frac{k}{2})^2=k-1$ 이므로 $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$, $k=2$. 즉, $x^2-2x+1=0$에서

$(x-1)^2=0$ 이므로 해는 $x=1$이고 $a=1$

그러므로 $k+a=3$

14.

$x=5$를 $2x^2-9x+k=0$에 대입하면 $k=-5$

$2x^2-9x-5=0$, $(2x+1)(x-5)=0$,

$x=-\frac{1}{2}$또는 $x=5$

즉, 다른 한 근은 $x=-\frac{1}{2}$이므로 $m=-\frac{1}{2}$

그러므로 $-k+2m=4$

15.
꼭짓점 A의 좌표를 $(p,\ q)$라고 하면 $(-3,\ q)$이고
$\triangle ABO$의 넓이가 18이므로 $\frac{1}{2}\times 6\times q=18,\ q=6$
즉,A$(-3,\ 6)$이므로 이차함수 식은
$y=a(x+3)^2+6$
점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $0=9a+6 \qquad a=-\frac{2}{3}$
그러므로 $y=-\frac{2}{3}(x+3)^2+6$이므로 전개하면
$y=-\frac{2}{3}x^2-4x$ 이므로 $b=-4,\quad c=0$

16.
$y=ax^2-2ax+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 13)$을
지나므로 $13=a+2a+b \qquad 3a+b=13\cdots①$
$y=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$의 그래프이고
꼭짓점 $(1,\ -a+b)$이 일차함수 $y=-2x+7$
그래프 위의 점이므로 $-a+b=-2+7$
$a-b=-5\cdots②$, ①, ②를 연립하여 풀면
$a=2,\ b=7$

2-1 복소수

스스로 확인하기 p.77~80

1. 실수부분 3, 허수부분 1

2. 실수부분 -2, 허수부분 $\sqrt{2}$

3. $a=1,\ b=2$

4. $a=0,\ b=-4$

5. (1) $2-i$
(2) $i+\sqrt{3}$

6. (1) $a=5,\ b=3$
(2) $a=2,\ b=5$

7. (1) $2-2i$
(2) $3-5i$

8. (1) $3+i$
(2) $-13+11i$

9. (1) $-i$
(2) $\frac{4+7i}{5}$

10. (1) $\pm\sqrt{5}\,i$
(2) $\pm 2\sqrt{5}\,i$
(3) $\pm 6i$

11. (1) -4
(2) $3\sqrt{2}\,i$
(3) $-\sqrt{5}\,i$
(4) $\sqrt{15}$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.81~88

1. ④ **1-1.** ②

2. (1) $x=1,\ y=-2$ (2) $x=1,\ y=2$

2-1. $x=1,\ y=3$

3. (1) $11+10i$ (2) $9-7i$

3-1. (1) $-4-2i$ (2) $-1+7i$

4. (1) $-9+4i$ (2) $-8-15i$

4-1. (1) $12-i$ (2) $11-i$

5. $a=3,\ b=-2$ **5-1.** $a=1,\ b=-3$

6. -1 **6-1.** $-\frac{20}{7}$

7. 2 **7-1.** $-6+4i$

8. ④ **8-1. ②**

1. ④ π 는 실수이다.

1-1.

① 허수단위 i는 양수도 아니고 음수도 아니다.

③ $1-i$ 의 허수부분은 -1이다.

④ $a^2=-1$ 이면 $a=\pm i$ 이다.

⑤ 9 의 허수부분은 0 이다.

2.

(1) $x+y=-1,\ 2x-3y=8$ 이므로

$x=1,\ y=-2$

(2) $3x+y=5,\ x-y=-1$ 이므로

$x=1,\ y=2$

2-1.

$x+2y-5=2,\ 6x-y+1=4$ 이므로

$x=1,\ y=3$

3.

(1) $5+3i+6+7i=11+10i$

(2) $6-8i+3+i=9-7i$

3-1.

(1) $-9-4i+5+2i=-4-2i$

(2) $6i-3+2+i=-1+7i$

4.

(1) $-3+5i-(6+i)=-3+5i-6-i=-9+4i$

(2) $-6-8i-(2+7i)=-6-8i-2-7i=-8-15i$

4-1.

(1) $7-2i-(-i-5)=7-2i+i+5=12-i$

(2) $13+4i-(2+7i)+2i=13+4i-2-7i+2i=11-i$

5.

$(1+2i)(a+bi)=7+4i$

$a+bi+2ai-2b=7+4i$

$(a-2b)+(2a+b)i=7+4i$ 이므로

$a-2b=7,\ 2a+b=4$ 이다.

따라서 $a=3,\ b=-2$ 이다.

5-1.

$(2+i)(a+bi)=5-5i$

$2a+2bi+ai-b=5-5i$

$(2a-b)+(a+2b)i=5-5i$ 이므로

$2a-b=5,\ a+2b=-5$ 이다.

따라서 $a=1,\ b=-3$ 이다.

6.

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ 이다.

$xy=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{1-3i^2}{4}=\frac{4}{4}=1$

$x+y=1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 대입하여 계산하면

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=-1$이다.

따라서 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=-1$

6-1.

$xy=\left(\frac{7}{2-\sqrt{3}i}\right)\left(\frac{7}{2+\sqrt{3}i}\right)=\frac{49}{7}=7$

$x+y=\left(\frac{7}{2-\sqrt{3}i}\right)+\left(\frac{7}{2+\sqrt{3}i}\right)$

$=\frac{7(2+\sqrt{3}i)+7(2-\sqrt{3}i)}{7}$

$=4$

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ 이므로

대입하여 계산하면

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\frac{64-84}{7}=-\frac{20}{7}$

7.

$\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$

$=-\sqrt{36}+\sqrt{-36}+\sqrt{4}$

$=-6+6i+2$

$=-4+6i$

이므로 $a=-4,\ b=6$ 이다.

$a+b=-4+6=2$

7-1.

$\sqrt{-3}\sqrt{12}+\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{36}\,i-\sqrt{36}-\sqrt{4}\,i$

$=6i-6-2i$

$=-6+4i$

8.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0, b<0$

즉 $-a>0$이므로 $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$

8-1.

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이므로 $a>0, b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$

$(\sqrt{b^2}=|b|=-b)$

③ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$

따라서 옳은 것은 ②이다.

2-2 이차방정식의 판별식, 근과 계수의 관계

스스로 확인하기 p.89~93

1. (1) 실근 (2) 허근

2. (1) 5, 1, 7, −3, <, 서로 다른 두 허근
(2) 1, 2, −6, 49, >, 서로 다른 두 실근

3. (1) −1, 1, 3, −2, <, 서로 다른 두 허근
(2) 2, 4, 1, 0, =, 중근

4. (1) 4, 1, $k+2$, 4, 8, 8, 8, 2
(2) 8, 2
(3) 8, 2

5. (1) $\dfrac{-6}{1}$, 6, $\dfrac{4}{1}$, 4
(2) $\dfrac{1}{-3}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{-7}{-3}$, $\dfrac{7}{3}$

6. (1) $\dfrac{-3}{3}$, 1, $\dfrac{4}{3}$, α, β, 1, $\dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{5}{3}$
(2) $\alpha+\beta$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{3}{4}$

7. 4, −7, −4, −7

8. (1) 2, −15, 2, 15
(2) 4, 5, 4, 5
(3) −2, −2, 2, 2

대표유형 및 쌍둥이유형 p.94~97

1. ② **1-1.** $k<-\dfrac{9}{4}$

2. 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2-1. 서로 다른 두 허근을 갖는다.

3. (1) $\dfrac{7}{3}$ (2) $-\dfrac{29}{15}$ **3-1.** (1) 2 (2) $-\dfrac{13}{2}$

4. (1) $x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}=0$ **4-1.** $x^2+8x+15=0$

1.

이차방정식 $x^2-6x+1-5k=0$가 중근을 가지므로 판별식 $D=0$이 되어야 한다.

따라서 $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\times(1-5k)=8+5k=0$.

$k=-\dfrac{8}{5}$

1-1.

이차방정식 $x^2+3x-k=0$이 서로 다른 허근을 가지므로 판별식 $D<0$이 되어야 한다.

따라서 $D=3^2-4\times1\times(-k)=9+4k<0$.

$$k<-\frac{9}{4}$$

2.

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-3=0$의 판별식 D가

$D=(-2k)^2-4\times1\times(k^2-3)=12$이므로

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-3=0$은

서로 다른 두 실근을 갖는다.

2-1.

이차방정식 $4x^2+4kx+k^2+1=0$의 판별식 D가

$D=(4k)^2-4\times4\times(k^2+1)=-16$이므로

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-3=0$은

서로 다른 두 허근을 갖는다.

3.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3},\ \alpha\beta=\frac{5}{3}$$

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}$

(2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\frac{29}{15}$

3-1.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=-\frac{1}{2}-(-\frac{3}{2})+1$

$=2$

(2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\frac{13}{2}$

4.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{4},\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$과 $-\frac{1}{2}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하면

$a=-\{\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})\}=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$

따라서 $x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=0$.

4-1.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-5$

-3과 -5을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하면

$a=-\{-3+(-5)\}=8,\ b=-3\times(-5)=15$

따라서 $x^2+8x+15=0$.

2-3 이차방정식과 이차함수

스스로 확인하기 p.98~101

1.

이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 판별식 D가

$D=(-3)^2-4\times1\times(-1)=13$이므로 $D>0$이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-3x-1$의

그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

2.

이차방정식 $2x^2+x+1=2x-4$,

즉 $2x^2-x+5=0$의 판별식 D가

$D=(-1)^2-4\times2\times5=-39$이므로

$D<0$이다. 따라서 이차함수 $y=2x^2+x+1$의

그래프는 직선 $y=2x-4$와 만나지 않는다.

3.

이차방정식 $-x^2+3=-3x+1$,

즉 $x^2-3x-2=0$의 판별식 D가

$D=(-3)^2-4\times1\times(-2)=17$이므로 $D>0$이다.

따라서 이차함수 $y=-x^2+3$의 그래프는

직선 $y=-3x+1$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

4.

(1) $y=x^2-4x+1=(x^2-4x+4)-3=(x-2)^2-3$
이므로 최솟값은 -3이다.

(2) $y=-3x^2+6x=-3(x^2-2x+1)+3=-3(x-1)^2+3$
이므로 최댓값은 3이다.

5.

(1) $y=x^2+6x+2=(x+3)^2-7$이므로 꼭짓점의 x좌표 -3은 주어진 범위 $-4 \le x \le 0$에 속한다.
$x=-4$일 때 $y=-6$,
$x=-3$일 때 $y=-7$,
$x=0$일 때 $y=2$이므로 구하는 최댓값은 2, 최솟값은 -7이다.

(2) $y=x^2+6x+2=(x+3)^2-7$이므로 꼭짓점의 x좌표 -3은 주어진 범위 $-1 \le x \le 2$에 속하지 않는다. $x=-1$일 때 $y=-3$, $x=2$일 때 $y=18$이므로 구하는 최댓값은 18, 최솟값은 -3이다.

대표유형 및 쌍둥이유형 p.102~105

1. $k>-1$ **1-1.** $k<-\frac{9}{8}$

2. $k \ge -\frac{9}{4}$ **2-1.** $a=-7$ 또는 $a=5$

3. $k=3$ **3-1.** $k=-\frac{28}{3}$

4. 7 **4-1.** -22

1.

이차방정식 $-x^2-2x+k=0$의 판별식 D가
$D=(-2)^2-4\times(-1)\times k=4+4k$이고 이차함수
$y=-x^2-2x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른
두 점에서 만나므로 $D=4+4k>0$이다.
따라서 $k>-1$이다.

1-1.

이차방정식 $2x^2-3x-k=0$의 판별식 D가
$D=(-3)^2-4\times2\times(-k)=9+8k$이고 이차함수
$y=2x^2-3x-k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로
$D=9+8k<0$이다. 따라서 $k<-\frac{9}{8}$이다.

2.

이차방정식 $x^2-4x=-x+k$, 즉 $x^2-3x-k=0$의
판별식 D가 $D=(-3)^2-4\times1\times(-k)=9+4k$이고
이차함수 $y=x^2-4x$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와
만나므로 $D=9+4k \ge 0$이다. 따라서 $k \ge -\frac{9}{4}$이다.

2-1.

이차방정식 $3x^2-ax+4=x+1$,
즉 $3x^2-(a+1)x+3=0$의 판별식 D가
$D=(a+1)^2-4\times3\times3=(a+1)^2-36$이고
이차함수 $y=3x^2-ax+4$의
그래프가 직선 $y=x+1$과
한 점에서 만나므로 $D=(a+1)^2-36=0$이다.
따라서 $a+1=\pm6$이므로 $a=-7$ 또는 $a=5$이다.

3.

$y=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$이고 이차함수의
최솟값이 -1이므로 $k-4=-1$이다.
따라서 $k=3$이다.

3-1.

$y=-2x^2+16x+3k+1=-2(x-4)^2+3k+33$
이고 이차함수의 최댓값이 5이므로 $3k+33=5$이다.
따라서 $k=-\frac{28}{3}$이다.

4.

$y=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$이므로 꼭짓점의
x좌표 1은 $0 \le x \le 3$에 속한다.
이 범위에서 이차함수의
최솟값이 3이므로 $k-1=3$이다.
따라서 $k=4$이다. $x=0$일 때 $y=4$이고

$x=3$일 때 $y=7$이므로 주어진 범위에서
이차함수의 최댓값은 7이다.

4-1.
$y=-x^2-6x+k=-(x+3)^2+k+9$이므로
꼭짓점의 x좌표 -3은 $-2\le x\le 2$에 속하지
않는다. $x=-2$일 때 $y=k+8$, $x=2$일 때
$y=k-16$이고 주어진 범위에서 이차함수의
최댓값이 2이므로 $k+8=2$이다.
따라서 $k=-6$이므로 주어진 범위에서
이차함수의 최솟값은 $k-16=-22$이다.

2-4 여러 가지 방정식

스스로 확인하기 p.106~110

1. $x+1$, $x+3$, $x=-1$, $x=-3$

2. x^3-27, $x-3$, x^2+3x+9,
$x=3$, $x=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

3. $x-1$, $x=1$, $x=2\pm\sqrt{5}$

4. $x+1$, $x-1$, $x=-1$, $x=1$

5. x^2-x, $X-1$, $X-2$, $X=1$, $X=2$,
$x^2-x=1, x^2-x=2, x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, x=-1, x=2$

6. (1) 1, 0
(2) $-\omega^2$, $-\omega$, -2

7. $y=-7$, $y=1$, $\begin{cases}x=-5\\y=-7\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

8. $x-2y$, $2x-y$, $y=\pm 1$, $x=\dfrac{y}{2}$, $y=\pm 2$,
$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$, $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$, $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.111~120

1. $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

1-1. $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-5$

2. $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

2-1. $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

3. $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm 2i$

3-1. $x=-1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

4. -1 4-1. 1

5. -2 5-1. -2

6. -14 6-1. -1

7. 3 cm 7-1. 7 cm

8. $\begin{cases}x=-5\\y=-7\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

8-1. $\begin{cases}x=\pm\sqrt{21}\\y=\pm\sqrt{21}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\pm 2\sqrt{7}\\y=\pm\sqrt{7}\end{cases}$

9. 4 9-1. $2\sqrt{10}$, $-2\sqrt{10}$, 5, -5

10. 2 cm, 10 cm 10-1. 13 또는 31

1.
좌변을 인수분해하면 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$
따라서 방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

1-1.
좌변을 인수분해하면 $x(x-2)(x+5)=0$
따라서 방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=2$
또는 $x=-5$

2.
$P(x)=x^4+5x^3+2x^2-5x-3$이라고 하면
$P(1)=0$, $P(-1)=0$이므로 방정식의 좌변을

인수분해하면 $(x-1)(x+1)(x^2+5x+3)=0$
따라서 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

2-1.

$P(x)=x^4+5x^3+2x^2-5x-3$이라고 하면
$P(-1)=0,\ P(2)=0$이므로 방정식의 좌변을
인수분해하면 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$
따라서 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}\,i$

3.

$x^2=X$로 놓으면 $X^2+2X-8=0$
좌변을 인수분해하면 $(X-2)(X+4)=0$
$X=2$ 또는 $X=-4$, 즉 $x^2=2$ 또는 $x^2=-4$
따라서 방정식의 해는 $x=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm 2i$

3-1.

$x^2+2x=X$로 놓으면 $X^2-X-20=0$
좌변을 인수분해하면 $(X+4)(X-5)=0$
$X=-4$또는 $X=5$,
즉, $x^2+2x=-4$ 또는 $x^2+2x=5$
따라서 방정식의 해는

$x=-1\pm\sqrt{3}\,i$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

4.

$x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로
$w^3=1,\ w^2+w+1=0$이다.
따라서 $w^2+w^4=w^2+w=-1$

4-1.

$x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로
$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이다.
따라서 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^9$
$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^2(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^3$
$=1$

5.

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^3=8,\ \omega^2+2\omega+4=0$
$\omega^2+2\omega+4=0$의 양변을 ω로 나누면
$\omega+2+\dfrac{4}{\omega}=0$이므로 $\omega+\dfrac{4}{\omega}=-2$

5-1.

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^3=8,\ \omega^2+2\omega+4=0$
$\omega^2+2\omega+4=0$의 양변을 ω로 나누면
$\omega+2+\dfrac{4}{\omega}=0,\ \omega+\dfrac{4}{\omega}=-2$
따라서 $\dfrac{\omega^4}{8}+\dfrac{4}{\omega}=\dfrac{\omega^3\times\omega}{8}+\dfrac{4}{\omega}=\omega+\dfrac{4}{\omega}=-2$

6.

삼차방정식에 $x=-1,\ x=2$를 각각 대입하면
$1-a+b=0,\ 16+2a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=-6$
따라서 $x^3+2x^2-5x-6=0$의 좌변을
인수분해하면 $(x+1)(x-2)(x+3)=0$
따라서 나머지 한 근은 $x=-3$이므로 구하는
합은 $-3-5-6=-14$

6-1.

좌변을 인수분해하면
$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$
즉, $x+1=0$ 또는 $x-2=0$
또는 $x^2+2x+3=0$이므로
$a+b=-1+2=1$
$c,\ d$는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로
$c+d=-2,\ cd=3$
즉, $c^2+d^2=(c+d)^2-2cd=-2$
따라서 $a+b+c^2+d^2=-1$

7.

정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면
$(x+3)(x+1)(x-2)=24$
즉, $x^3+2x^2-5x-30=0$
이 방정식을 풀면 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{2}$

그런데 $x>2$인 실수이므로
처음 정육면체 한 모서리의 길이는 3 cm이다.

7-1.

정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라고 하면
$(x+2)(x+2)(x-4)=243$ 즉, $x^3-12x-259=0$
이 방정식을 풀면 $x=7$ 또는 $x=\dfrac{-7\pm3\sqrt{11}i}{2}$
그런데 $x>4$인 실수이므로
처음 정육면체 한 모서리의 길이는 7 cm이다.

8.

$x=y+3$을 $x^2-xy+y^2=13$에 대입하여 풀면
$y=-4$ 또는 $y=1$이다. 따라서 연립
방정식의 해는 $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$ 이다.

8-1.

$x^2-3xy+2y^2=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-y)(x-2y)=0$, 즉 $x=y$ 또는 $x=2y$
(i) $x=y$를 $x^2+3xy-y^2=63$에 대입하여
풀면 $y=\pm\sqrt{21}$이므로 $y=\sqrt{21}$일 때
$x=\sqrt{21}$, $y=-\sqrt{21}$일 때 $x=-\sqrt{21}$
(ii) $x=2y$를 $x^2+3xy-y^2=63$에 대입하여
풀면 $y=\pm\sqrt{7}$이므로 $y=\sqrt{7}$일 때
$x=2\sqrt{7}$, $y=-\sqrt{7}$일 때 $x=-2\sqrt{7}$
(i), (ii)에서 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=\pm\sqrt{21}\\y=\pm\sqrt{21}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\pm2\sqrt{7}\\y=\pm\sqrt{7}\end{cases}$

9.

$x^2-y^2=0$을 인수분해하면
$(x+y)(x-y)=0$, 즉 $x=-y$ 또는 $x=y$
(i) $x=-y$를 $x^2-xy+2y^2=8$에 대입하여 풀면
$y=\pm\sqrt{2}$이므로 $y=\sqrt{2}$일 때 $x=-\sqrt{2}$,
$y=-\sqrt{2}$일 때 $x=\sqrt{2}$
(ii) $x=y$를 $x^2-xy+2y^2=8$에 대입하여 풀면
$y=\pm2$이므로 $y=2$일 때 $x=2$,
$y=-2$일 때 $x=-2$
(i), (ii)에서 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는
$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$
따라서 $\alpha+\beta$의 값은 0, 4, -4이므로 최댓값은 4

9-1.

$3x^2-5xy+2y^2=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-y)(3x-3y)=0$, 즉 $x=y$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}y$
(i) $x=y$를 $x^2-2xy+2y^2=10$에 대입하여 풀면
$y=\pm\sqrt{10}$이므로 $y=\sqrt{10}$일 때
$x=\sqrt{10}$, $y=-\sqrt{10}$일 때 $x=-\sqrt{10}$
(ii) $x=\dfrac{2}{3}y$를 $x^2-2xy+2y^2=10$에 대입하여
풀면 $y=\pm3$이므로 $y=3$일 때 $x=2$,
$y=-3$일 때 $x=-2$
(i), (ii)에서 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=\pm\sqrt{10}\\y=\pm\sqrt{10}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\pm2\\y=\pm3\end{cases}$
이때 $\alpha+\beta$의 값은 $2\sqrt{10}$, $-2\sqrt{10}$, 5, -5

10.

직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm
라고 하면 $\begin{cases}x+y=12\\x^2+y^2=104\end{cases}$
$y=12-x$를 $x^2+y^2=104$에 대입하여 풀면
$x=2$ 또는 $x=10$ 따라서 연립방정식의 해는
$x=2$, $y=10$ 또는 $x=10$, $y=2$
따라서 직각을 낀 두 변의 길이는 2 cm, 10 cm

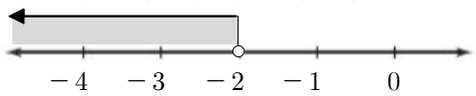
10-1.

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 x, y라 하면
㈎에서 $x+y=4$, ㈏에서 $x^2+y^2=xy+7$
$y=4-x$를 $x^2+y^2=xy+7$에 대입하여 풀면
$x=1$ 또는 $x=3$ 따라서 방정식의 해는
$x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$
그러므로 구하는 두 자리의 자연수는 13 또는 31

2-5 일차부등식

스스로 확인하기 p.121~125

1. 3, >, −2, >, 4, −2, <, −2



2. (1) $2 < x \leq 3$ (2) 해가 없다.

3. (1) $x \leq 2$ 또는 $x \geq 4$ (2) $-5 \leq x \leq 7$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.126~129

1. $-2 < x \leq 1$ **1-1.** 해가 없다.

2. $-4 < x < 1$ **2-1.** 해가 없다.

3. $-1 < x < 3$

3-1. $x < -1$ 또는 $x > 2$

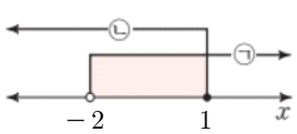
4. $-3 \leq x \leq 3$ **4-1.** $x \leq -3$ 또는 $x \geq 4$

1.

$x+2>0$을 풀면 $x>-2$ …… ㉠

$4x+5 \leq 9$를 풀면 $x \leq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



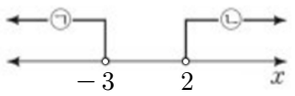
따라서 연립부등식의 해는 $-2 < x \leq 1$

1-1.

$5x+1<3x-5$를 풀면 $x<-3$ …… ㉠

$2x+3>7$을 풀면 $x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 없다.

2.

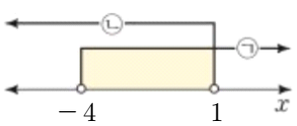
주어진 연립부등식은

$\begin{cases} x-1<2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<6-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 꼴로 나타낼 수 있다.

부등식 ㉠을 풀면 $x>-4$

부등식 ㉡을 풀면 $x<1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 $-4<x<1$

2-1.

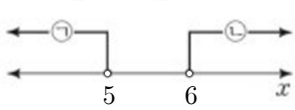
주어진 연립부등식은

$\begin{cases} 2x-3<x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2<3x-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 꼴로 나타낼 수 있다.

부등식 ㉠을 풀면 $x<5$

부등식 ㉡을 풀면 $x>6$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 없다.

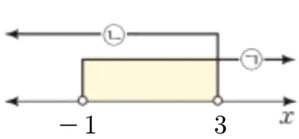
3.

$|3x-3|<6$에서 $-6<3x-3<6$

$3x-3>-6$에서 $x>-1$ …… ㉠

$3x-3<6$에서 $x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



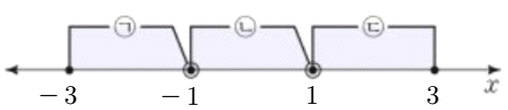
따라서 부등식의 해는 $-1<x<3$

3-1.

$|2-4x|>6$에서 $2-4x<-6$ 또는 $2-4x>6$

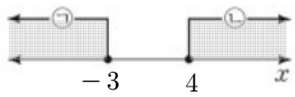
$2-4x<-6$에서 $x>2$
$2-4x>6$에서 $x<-1$
따라서 부등식의 해는 $x<-1$ 또는 $x>2$

4.
$x<-1$, $-1\le x<1$, $x\ge 1$일 때로 나누어 푼다.
(ⅰ) $x<-1$일 때
$|x+1|=-(x+1)$, $|x-1|=-(x-1)$이므로
$-(x+1)-(x-1)\le 6$, $x\ge -3$
그런데 $x<-1$이므로 $-3\le x<-1$ …… ㉠
(ⅱ) $-1\le x<1$일 때
$|x+1|=x+1$, $|x-1|=-(x-1)$이므로
$(x+1)-(x-1)\le 6$, $2\le 6$
따라서 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다.
즉, $-1\le x<1$ …… ㉡
(ⅲ) $x\ge 1$일 때
$|x+1|=x+1$, $|x-1|=x-1$이므로
$(x+1)+(x-1)\le 6$, $x\le 3$
그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 3$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-3\le x\le 3$

4-1.
$x<-1$, $-1\le x<2$, $x\ge 2$일 때로 나누어 푼다.
(ⅰ) $x<-1$일 때
$|x+1|=-(x+1)$, $|x-2|=-(x-2)$이므로
$-(x+1)-(x-2)\ge 7$, $x\le -3$
그런데 $x<-1$이므로 $x\le -3$ …… ㉠
(ⅱ) $-1\le x<2$일 때
$|x+1|=x+1$, $|x-2|=-(x-2)$이므로
$(x+1)-(x-2)\ge 7$, $3\ge 7$이므로
주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 없다.
(ⅲ) $x\ge 2$일 때
$|x+1|=x+1$, $|x-2|=x-2$이므로
$(x+1)+(x-2)\ge 7$, $x\ge 4$
그런데 $x\ge 2$이므로 $x\ge 4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $x\le -3$ 또는 $x\ge 4$

2-6 이차부등식

스스로 확인하기 p.130~134

1. (1) × (2) ○ (3) ×

2. (1) $x<\boxed{-3}$ 또는 $x>\boxed{1}$
(2) $\boxed{2\le x\le 5}$

3. (1) $(x-2)(x+1)$, $(-1,0)$, $(2,0)$, $x\le -1$, $x\ge 2$
(2) $x^2-4x\le 0$, $x(x-4)$, $(0,0)$, $(4,0)$, $\le$, $0\le x\le 4$

4. (1) $\ge$, $x-3$, $x+2$, -2, 3, $x>3$
(2) $x-2$, $x+2$, -2, 2, x, $x+1$, 0, 1, $-2\le x<0$ 또는 $1<x\le 2$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.135~138

1. $x<-3$ 또는 $x>1$

1-1. $-1<x<4$

2. $x\ne -2$인 모든 실수 **2-1.** $x=3$

3. 모든 실수 **3-1.** 해가 없다

4. $-6<k<-2$ **4-1.** $a+b=-10$

1.
$4x-3>-x^2+2x \Rightarrow 4x-3-(-x^2+2x)>0$

$\Rightarrow \quad x^2+2x-3>0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+3)>0$
$x<-3$ 또는 $x>1$

1-1.

$x^2<3x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4<0$
$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)<0$
$-1<x<4$

2.

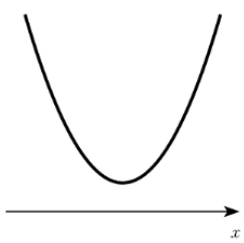
$x^2+6x-2>2x-6 \quad \Rightarrow \quad x^2+6x-2-(2x-6)>0$
$\Rightarrow \quad x^2+4x+4>0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2>0$
$x\neq-2$인 모든 실수

2-1.

$x^2+9\leq 6x \quad \Rightarrow \quad x-6x+9\leq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2\leq 0$
$x=3$

3.

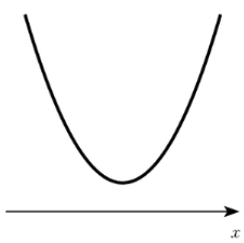
$2x^2+4x+7>0$
$D=4^2-4\times 2\times 7=16-56=-40<0$
그래프의 형태는



이므로 해는 모든 실수

3-1.

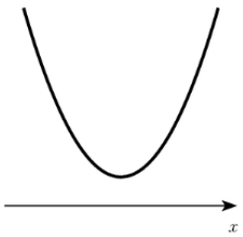
$3x^2+2x+7<2x^2-x-2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+2x+7-(2x^2-x-2)$
$\Rightarrow \quad x^2+3x+9<0$
$D=3^2-4\times 1\times 9=9-39=-27<0$
그래프의 형태는



이므로 해가 없다.

4.

그래프의 형태가



이어야 하므로

$D=k^2-4(-2k-3)=k^2+8k+12<0$
$(k+2)(k+6)<0$
$-6<k<-2$

4-1.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해가 $x=-2$ 또는 $x=4$이어야 하므로 근과 계수와의 관계에 의해
$a=-(-2+4)=-2$, $b=-2\times 4=-8$, $a+b=-10$

3 경우의 수

3-0 중학교 개념으로 확인하기

스스로 확인하기 p.140~143

1. ① 홀수가 나온다,
② 소수가 나온다.
③ 6의 약수가 나온다.
④ 홀수가 나올 경우는 1, 3, 5이므로 경우의 수는 3이다.
⑤ 소수가 나올 경우는 2, 3, 5이므로 경우의 수는 3이다.
⑥ 6의 약수가 나올 경우는 1, 2, 3, 6이므로 경우의 수는 4이다.

2. (1) 36가지

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

(2) (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)
경우의 수 6

(3) (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)
경우의 수 5

3. $3+4=7$

4. $2+4=6$

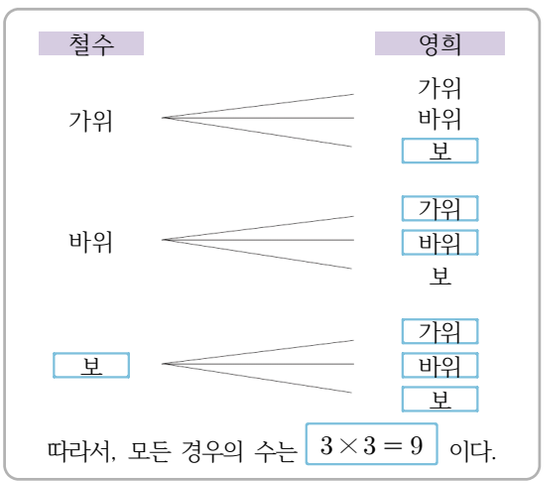
5. $4+6=10$

6. $6+7=13$

7. $2\times3=6$

8. $4\times2=8$

9. (1)



따라서, 모든 경우의 수는 $3\times3=9$ 이다.

(2) 3

(3) 3

(4) 3

사례 탐구 p.144

[도전! 사례 탐구 1]

할머니 댁에 가는 길에 휴게소에 들렀다. 휴게소 음식 코너에는 감자, 오징어, 소시지를 팔고 음료수 코너에는 오렌지 주스와 포도 주스를 팔고 있었다. 휴게소에 들러 딱 한 가지만 사 먹으려고 할 때, 사먹을 수 있는 모든 경우의 수는 몇 가지일까?

(풀이) $3+2=5$

[도전! 사례 탐구 2]

식목일에 나무를 심기 위해 화훼 단지에 다녀왔다. 종류가 서로 다른 나무 2그루와 빨강, 파랑, 노랑색의 화분을 각각 구입하였다. 나무를 화분에 심을 수 있는 방법의 경우의 수는 몇 가지일까?

(풀이) $2\times3=6$

3-0 중학교 문제로 다지기

중학교 문제로 다지기 p.145-152

1. (1) 6 (2) 2 (3) 8

2. 6

3. (1) 5 (2) 6

4. 12 **5.** 14

6. 20 **7.** 7

8. 5 **9.** 30

10. 24 **11.** 7

12. 6 **13.** 12

14. 5 **15.** 5

16. (1) 16 (2) 4 (3) 8

1.
(1) 3의 배수가 나오는 경우의 수는
3, 6, 9, 12, 15, 18로 6이다.
(2) 8의 배수가 나오는 경우의 수는 8, 16으로 2이다.
(3) 3의 배수 또는 8의 배수가 나오는 경우의 수는 $6+2=8$이다.

2.
만들 수 있는 두 자리의 자연수는
12, 13, 21, 23, 31, 32이고,
그 경우의 수는 6이다.

3.
(1) $2+3=5$
(2) $2\times3=6$

4.
$4\times3=12$

5.
두 눈이 수의 차가 1인 경우 10가지
$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),$
$(6,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)$
두 눈이 수의 차가 4인 경우 4가지
$(1,5),(2,6),(5,1),(6,2)$
따라서, 구하는 경우의 수는 $10+4=14$이다.

6.
들어갈 때 선택할 수 있는 문 5개, 나올 때 선택할 수 있는 문은 들어갈 때와 다른 문을 선택해야 하므로 들어갈 때 선택한 문을 제외하면 4개이다.
따라서, 방을 들어 갔다가 나올 때, 같은 문을 사용하지 않는 경우의 수는 $5\times4=20$이다.

7.
A지점에서 B지점을 거쳐 C지점까지 가는 경로는 $3\times2=6$(가지)이고, A지점에서 C지점까지 바로 가는 경로는 1가지이므로 모든 경로의 수는 $6+1=7$이다.

8.
삼각형을 그리는 경우는
$\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$
이므로 경우의 수는 4가지이고, 사각형을 그리는 경우는 $\square ACDB$이므로 경우의 수는 1가지이다.
따라서, 삼각형 또는 사각형을 그릴 수 있는 모든 경우의 수는 $4+1=5$이다.

9.
6개의 과일 중에서 2개를 뽑아 한 줄로 세우는 방법과 같으므로 $6\times5=30$이다.

10.
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 1가지이므로 색을 칠하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times1=24$이다.

11.
한 개의 동전을 세 번 던질 때 나올 수 있는 전체 경우의 수는 $2\times2\times2=8$로 적어도 한 번은 앞면이 나오는 경우는 한 번도 앞면이 나오지 않는 경우 1가지를 제외한 것이므로 $8-1=7$이다.

12.
A지점에서 B지점까지 가는 최단 경로는 3가지, B지점에서 C지점까지 가는 최단 경로는 2가지, A지점에서 B지점을 거쳐 C지점까지 가는 최단 경로 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

13.
세 가지 색을 사용하는 경우의 수는 첫 번째 영역과 세 번째 영역에 서로 다른 색을 색칠해야 하므로 $3\times2\times1=6$(가지), 두 가지 색을 사용하는 경우의 수는 첫 번째 영역과 세 번째 영역에 같은 색을 색칠해야 하므로 $3\times2=6$이므로 색칠할 수 있는 모든 경우의 수는 $6+6=12$이다.

다른 풀이) 세 번째 영역에 첫 번째 영역과 같은 색을 색칠할 수도 있으므로
$3\times2\times2=12$이다.

14. 5가지

연번	100원짜리 동전 개수	50원짜리 동전 개수	10원짜리 동전 개수
1	5	2	0
2	5	1	5
3	4	4	0
4	4	3	5
5	3	5	5

15.
상자 A에 남아 있는 구슬의 수가 상자 B로 옮겨진 구슬의 수의 약수가 되는 경우를 나열해 보면
$(6,6),(4,8),(3,9),(2,10),(1,11)$으로
경우의 수는 5이다.

16.
(1) 십의 자리에 1, 2, 3, 4의 4개, 일의 자리에는 십의 자리의 숫자를 제외하되 0이 포함되므로 4개의 숫자가 올 수 있다. 따라서, 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는 $4\times4=16$이다.
(2) 5의 배수가 되려면 일의 자리 숫자가 0일 때이므로 10, 20, 30, 40으로 구하는 경우의 수는 4가지이다.
(3) 30미만인 경우는 십의 자리에 1, 2의 2개, 일의 자리에는 십의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $2\times4=8$이다.

3-1 경우의 수

스스로 확인하기 p.153~156

1. (1) 50 (2) 33

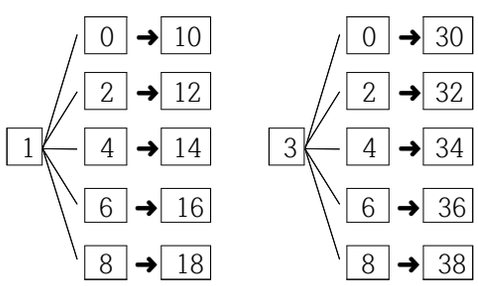
2. (1) (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
(2) (4, 6), (5, 5), (6, 4), 4, 3, 7

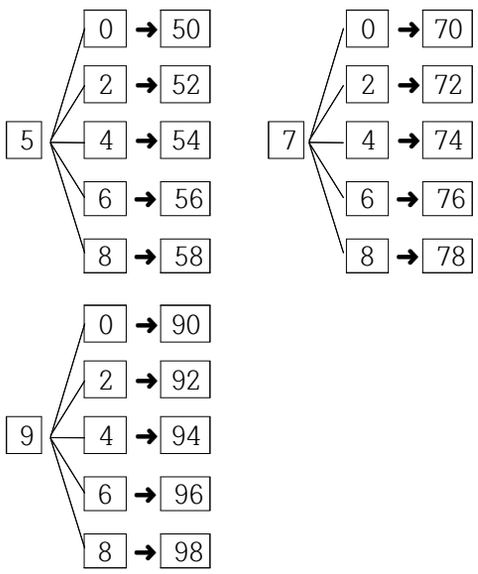
3.

2^3의 약수 / 3의 약수	1	2	2^2	2^3
1	1×1	1×2	1×2^2	1×2^3
3	3×1	3×2	3×2^2	3×2^3

4, 2, 8

4.





5, 5, 5, 5, 25

5. (1) 6 (2) 12

6. 3, 4, 5, 3, 4, 5, 60

대표유형 및 쌍둥이유형 p.157~162

1. 24 **1-1.** 6

2. 8 **2-1.** 10

3. 7 **3-1.** 7

4. 12 **4-1.** 20

5. 4 **5-1.** 7

6. 20 **6-1.** 18

1.
주사위의 눈을 순서쌍 (a, b)로 나타내자.
눈의 차가 0인 경우
(1, 1), (2, 2), …, (6, 6) 6가지
눈의 차가 1인 경우
(1, 2), (2, 3), …, (5, 6), (6, 5), …, (2, 1) 10가지
눈의 차가 2인 경우
(1, 3), (2, 4), …, (4, 6), (6, 4), …, (3, 1) 8가지
이는 각각 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용하여 6+10+8=24이다.

1-1.
주사위의 눈을 순서쌍 (a, b)로 나타내자.
눈의 합이 10인 경우
(4, 6), (5, 5), (6, 4) 3
눈의 합이 11인 경우
(5, 6), (6, 5) 2
눈의 합이 12인 경우
(6, 6) 1
이는 각각 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용하여 $3+2+1=6$이다.

2.
20이하의 자연수 중 3의 배수인 것은 6개, 7의 배수인 것은 2개이고 이는 동시에 일어나지 않으므로 $6+2=8$이다.

2-1.
30이하의 자연수 중 5의 배수인 것은 6개, 7의 배수인 것은 4개이고 이는 동시에 일어나지 않으므로 $6+4=10$이다.

3.
김밥 4종류와 라면 3종류 중에서 한 가지만 주문하는 경우는 김밥을 택하거나 라면을 택하는 경우이므로 합의 법칙을 이용하여 $4+3=7$이다.

3-1.
운동화 4켤레와 구두 3켤레 중에서 한 켤레만 택하는 경우는 운동화를 택하거나 구두를 택하는 경우이므로 합의 법칙을 이용하여 $4+3=7$이다.

4.
김밥 4종류와 라면 3종류 중에서 각각 한 가지씩 주문하는 경우는 김밥과 라면을 동시에 택하는 경우이므로 곱의 법칙을 이용하여 $4\times3=12$이다.

4-1.
티셔츠 5벌과 청바지 4벌 중에서 각각 한 가지씩 고르는 경우는 티셔츠와 청바지를 동시에 택하는 경우이므로 곱의 법칙을 이용하여 $5\times4=20$이다.

5.
(1) $x+2y=3$ 일 때 순서쌍을 구하면
$(1,1)$ 1
(2) $x+2y=4$ 일 때 순서쌍을 구하면
$(2,1)$ 1
(3) $x+2y=5$ 일 때 순서쌍을 구하면
$(3,1),(1,2)$ 2
이는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용하여 $1+1+2=4$이다.

5-1.
(1) $xy=3$ 일 때 순서쌍을 구하면
$(1,3),(3,1)$ 2
(2) $xy=4$ 일 때 순서쌍을 구하면
$(1,4),(2,2),(4,1)$ 3
(3) $xy=5$ 일 때 순서쌍을 구하면
$(1,5),(5,1)$ 2
이는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용하여$2+3+2=7$이다.

6.
표를 만들어 약수를 구하면

2^3의 약수 / 3^4의 약수	1	2	2^2	2^3
1	1×1	1×2	1×2^2	1×2^3
3	3×1	3×2	3×2^2	3×2^3
3^2	$3^2\times1$	$3^2\times2$	$3^2\times2^2$	$3^2\times2^3$
3^3	$3^3\times1$	$3^3\times2$	$3^3\times2^2$	$3^3\times2^3$
3^4	$3^4\times1$	$3^4\times2$	$3^4\times2^2$	$3^4\times2^3$

2^3의 약수의 개수는 4개, 3^4의 약수의 개수는 5개이고 각각을 동시에 택하므로 곱의 법칙을 이용하면 $4\times5=20$이다.

6-1.
먼저 180을 소인수분해하면 $180=2^2\times3^2\times5$
2^2의 약수는 $1,2,2^2$이므로 3개, 3^2의 약수는 $1,3,3^2$이므로 3개, 5의 약수는 $1,5$이므로 2개이고 이는 동시에 택하여 약수를 만들 수 있으므로 180의 약수의 개수는 곱의 법칙을 이용하여
$3\times3\times2=18$이다.

3-2 순열과 조합

스스로 확인하기 p.164~165

1. (1) 10, 9, 8, 720
(2) 24 (3) 24 (4) 20

2. (1) 4 (2) 4

3. (1) 3, 2, 1, 120
(2) 8, 7, 6, 5, 70

4. (1) ${}_7C_3=35$, ${}_7C_4=35$, ${}_7C_3={}_7C_4$
(2) ${}_5C_3=10$, ${}_4C_3+{}_4C_2=10$, ${}_5C_3={}_4C_3+{}_4C_2$

5. (1) ${}_{10}C_4=210$
(2) ${}_{20}C_2=190$
(3) ${}_{10}P_4=5040$
(4) ${}_{20}P_2=380$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.166~171

1. (1) 30 (2) 72

1-1. (1) 24 (2) 32

2. 336 **2-1.** 5040

3. 120 **3-1.** 120

4. (1) 10 (2) 10 (3) 40

4-1. (1) 45 (2) 120 (3) 15

5. 25 **5-1.** 24

6. 36 **6-1.** 165

1.

(1) ${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$

(2) ${}_3P_2 \times {}_4P_2 = 3 \times 2 \times 4 \times 3 = 72$

1-1.

(1) ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

(2) ${}_5P_2 + {}_4P_2 = 5 \times 4 + 4 \times 3 = 32$

2.

8개의 팀 중 3팀을 선택해서 공연 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_8P_3$이고 그 값은

${}_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$이다.

2-1.

10종류의 교과서 중 4권을 선택해서 책장에 꽂는 경우의 수는 ${}_{10}P_4$이고 그 값은

${}_{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$이다.

3.

5명이 순서를 고려하여 정하는 방법의 수는

$5! = 120$이다.

3-1.

1, 3, 5, 7, 9를 한 번씩 사용해서 만들 수 있는 자연수의 개수는 $5! = 120$이다.

4.

(1) ${}_5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

(2) ${}_5C_3 = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

(3) ${}_5C_3 \times {}_4C_3 = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \dfrac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 40$

4-1.

(1) ${}_{10}C_2 = \dfrac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$

(2) ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

(3) ${}_{15}C_1 \times {}_{14}C_{14} = 15 \times 1 = 15$

5.

홀수 5개 중 1개를 택하고, 짝수 5개 중 1개를 택하므로 ${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$ 이다.

5-1.

남자 6명 중 1명을 택하고, 여자 4명 중 1명을 택하므로 ${}_6C_1 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$이다.

6.

1이 적힌 공을 포함하는 경우는 1이 먼저 택해지고 나머지 9개 중에 2개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는 ${}_9C_2 = \dfrac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$이다.

6-1.

2가 적힌 공을 포함하는 경우는 2가 먼저 택해지고 나머지 11개 중 3개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는 ${}_{11}C_3 = \dfrac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$이다.

4 행 렬

4-0 중학교 개념으로 확인하기

스스로 확인하기 p.174~176

1. ①,③

2. ②

3. $x=5,\ y=-1$

4. $x=1,\ y=3$

5. $x=2,\ y=1$

6. $x=3,\ y=-1$

중학교 문제로 다지기 p.177~184

1. $x=1,\ y=\frac{1}{2}$

2. $x=5,\ y=2$

3. (1) $3x+4y=41$ (2) $100x+700y=3400$

4. $x=5,\ y=-3$

5. 해가 없다.

6. 해가 무수히 많다.

7. $x=-6,\ y=-4$

8. $x=2,\ y=-1$

9. $x=3,\ y=2$

10. $x=6,\ y=5$

11. $a=-1,\ b=1$

12. $a-b=6$

13. $a=-\frac{2}{3}$

14. $x=3,\ y=-1$

15. $x=12, y=6$

16. $a=2$

1.

$$\begin{cases} 6x+4y=8 & \cdots\cdots ③ \\ 5x-4y=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

③과 ②를 변끼리 더하면

$$11x=11,\quad x=1$$

$x=1$을 ①에 대입하면

$$3+2y=4,\quad 2y=1,\quad y=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$x=1,\ y=\frac{1}{2}$$

2.

x를 없애기 위하여 ①을 x에 대하여 풀면

$$x=2y+1 \qquad \cdots\cdots ③$$

③을 ②에 대입하면

$$2(2y+1)+5y=20,\quad 9y=18,\quad y=2$$

$y=2$를 ③에 대입하면

$$x=5$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$x=5,\ y=2$$

3.

(1) $3x+4y=41$

(2) $100x+700y=3400$

4.

$$\begin{cases} x=3y+14 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

대입하여 $2(3y+14)+y=7$

$7y+28=7$

$\therefore\ x=5,\ y=-3$

5.

①의 양변에 2를 곱하면

$4x-6y=8$ …… ③

③에서 ②를 변끼리 빼면

$(4x-6y)-(4x-6y)=8-5$

$0=3$ …… ④

④는 성립하지 않는다.

따라서 주어진 연립방정식의 해는 없다.

6.

①의 양변에 3을 곱하면

$3x+6y=9$ …… ③

③은 ②와 같으므로 ①과 ②의 해는 같다.

그런데 ①의 해는 무수히 많으므로 주어진 연립방정식의 해는 무수히 많다.

7.

①의 양변에 10을 곱하고 ②의 양변에 6을 곱하면

$\begin{cases}4x-3y=-12 & \cdots\cdots ③\\ x-3y=6 & \cdots\cdots ④\end{cases}$

③에서 ④를 변끼리 빼면

$3x=-18,\quad x=-6$

$x=-6$을 ④에 대입하면

$-6-3y=6,\quad -3y=12,\quad y=-4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$x=-6,\ y=-4$

8.

$\begin{cases}2x-(y+1)=4\\ 3x+5y=1\end{cases}$

$\begin{cases}10x-5y=25\\ 3x+5y=1\end{cases}$ 두 식의 합을 구하면

$13x=26\quad \therefore\ x=2,\ y=-1$

9.

$\begin{cases}2(x+3)=11-(y-x)\\ x=3(y-1)\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=5\\ x=3y-3\end{cases}$ 대입법을 이용하여

$\therefore\ x=3,\ y=2$

10.

$\begin{cases}2x-y=7\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=4\end{cases}$ >> $\begin{cases}4x-2y=14\\ 5x+2y=40\end{cases}$ 두 식을 더하면

$\therefore\ x=6,\ y=5$

11.

연립방정식 $\begin{cases}ax+by=1\\ bx-ay=3\end{cases}$의 해가 $x=1,\ y=2$

대입하면,

$\begin{cases}a+2b=1\\ -2a+b=3\end{cases}$ >> $\begin{cases}2a+4b=2\\ -2a+b=3\end{cases}$ 두 식을 더하면

$\therefore\ a=-1,\ b=1$

12.

$\begin{cases}x+2y=5\\ 5x-6y=9\end{cases}$ >> $\begin{cases}3x+6y=15\\ 5x-6y=9\end{cases}$ 두 식을 더하면

$\therefore\ x=3,\ y=1$ 본 식에 대입하면

$a=9,\ b=3\quad \therefore\ a-b=6$

13.

$\begin{cases}x+ay=4\\ 3x-2y=12\end{cases}$ 해가 무수히 많으면, 두 식이 동일

$\begin{cases}x+ay=4\\ x-\frac{2}{3}y=4\end{cases}\quad \therefore\ a=-\frac{2}{3}$

14.

$\begin{cases}bx+ay=5\\ ax+by=-7\end{cases}$ 에 $x=-1, y=3$을 대입하면

$\begin{cases}3b+9a=15\\ -a+3b=-7\end{cases}$ 두 식을 더하면,

$\therefore\ a=1,\ b=-2$

처음 연립방정식을 풀면, $\therefore\ x=3,\ y=-1$

15.

$\begin{cases}2x-3y=6\\ 2x-5y=-6\end{cases}$ 두 식을 빼면

$2y=12\quad \therefore\ y=6,\ x=12$

16.

$y=2x$

$\begin{cases}x-2y=12\\ y=2x\end{cases}$ 를 구하면, $x=-4,\ y=-8$

$\therefore\ a=2$

4-1 행 렬

스스로 확인하기 p.185~188

1. 3행 2열

2. 6

3. $x=5,\ y=-3$

4. $x=1,\ y=-2$

5. ① $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 5 & 5\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$

6. $x=3,\ y=-2$

7. 3

8. ① (26) ② $\begin{pmatrix}6 & 13\\ 4 & 18\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}14 & 18\\ 10 & -10\\ 4 & 8\end{pmatrix}$

9. ① $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 8 & -8\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$

10. ① $\begin{pmatrix}2 & -7\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}8 & 26\\ 4 & -17\\ -4 & 17\end{pmatrix}$

11. ① $\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.189~192

1. $x=5,\ y=-3$

1-1. $-8=-2x^2$이므로

$x=2x-y=-2$이므로

$y=4$

2. ① $\begin{pmatrix}6 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 6 & 7 & -1\end{pmatrix}$

2-1. $\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

3. $(7\ \ -6\ \ 9)$

3-1. $\begin{pmatrix}-6\\ -4\\ 34\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

4-1. ① $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

1.

$x-3=2,\ y+2=-1$이므로

$x=5,\ y=-3$

1-1.

$x+y=-1,\ -x+2y=-5$이므로

$x=1,\ y=-2$

2.

① $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+3\\ 3-1 & 4+2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 0 & 6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4-2 & -2-3 & 3-4\\ 1+5 & 7-0 & 5-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 6 & 7 & -1\end{pmatrix}$

2-1.

$A+X=B$ 에서 $X=B-A$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

3.

$$(5-2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 8\end{pmatrix}$$
$$=(5\cdot 1+(-2)\cdot(-1)\quad 5\cdot 0+(-2)\cdot 3\quad 5\cdot 5+(-2)\cdot 8)$$
$$=(7\quad -6\quad 9)$$

3-1.

$$\begin{pmatrix}7 & 5 & -1\\ -1 & 4 & 3\\ 2 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ -5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}7\cdot(-3)+5\cdot 2+(-1)\cdot(-5)\\ -1\cdot(-3)+4\cdot 2+3\cdot(-5)\\ 2\cdot(-3)+0\cdot 2+(-8)\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -4\\ 34\end{pmatrix}$$

4.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0\\ -1\cdot 1+0\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+0\cdot 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\therefore\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0\\ -1\cdot 1+1\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+1\cdot 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

4-1

① $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

① $-E=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

② $E^3=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

③ $E^{100}+(-E)^{100}=E+E=2E=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

5 도형의 방정식 (1)

5-0 중학교 개념으로 확인하기

스스로 확인하기 p.194~197

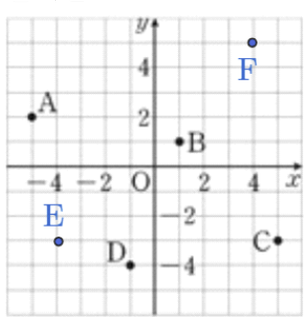
1. $A(-3,4)$, $B(-2,-3)$, $C(3.-3)$, $D(4,0)$

2. $A(+,+)$, $B(-,+)$, $C(-,-)$, $D(+,-)$

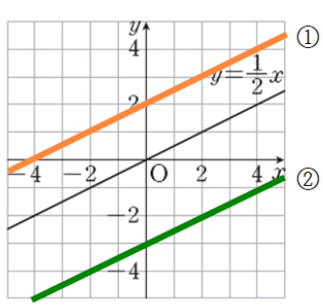
3. (1) 제4사분면, (2) 제1사분면,
(3) 제3사분면, (4) 제2사분면

4. (1) ① $A(-5,2)$, $B(1,1)$,
$C(5.-3)$, $D(-1,-4)$

(2) 풀이참조



5.



6. $-\frac{5}{7}$

7. ①③, ②⑥, ④⑤

중학교 문제로 다지기 p.198~205

1. $y=3x-2$

2. $y=-2x+1$

3. $y=\frac{3}{2}x-3$

4. (1) x절편: $-\frac{4}{3}$, y절편: 4, 기울기: 3

   (2) x절편: 12, y절편: 6, 기울기: $-\frac{1}{2}$

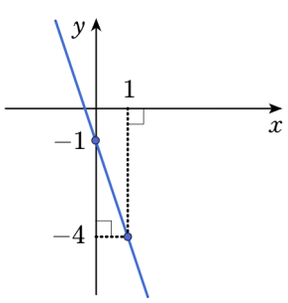
5. $a=-\frac{2}{3}$, $b=3$

6. 20

7. $k=9$

8. $a=-\frac{4}{3}$, $b=3$

9. 풀이 참조



10. (1) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, (2) $x=3$

11. (-1, 1)

12. 해가없다.

13. (1) (가)와 (나), (나)와 (다)
    (2) (가)와 (다)

14. $\frac{1}{2}\le a\le 4$

15. 제4사분면

16. ① $y=4$, ② $x=3$, ③ $y=\frac{4}{3}x$

1.
기울기가 3이므로 구하는 일차함수의 식을
$y=3x+b$라고 하자.
이 일차함수의 그래프가 점 (1, 1)을 지나므로
$1=3\times1+b$, $b=-2$
따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=3x-2$

2.
구하는 일차함수의 식을 $y=ax+b$라고 하면
기울기 a는
$a=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{-3-3}{2-(-1)}=\frac{-6}{3}=-2$
즉, $y=-2x+b$
또 이 일차함수의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로
$3=-2\times(-1)+b$, $b=1$
따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=-2x+1$

3.
기울기 $\frac{3}{2}$이고, y절편이 -3이므로
$y=\frac{3}{2}x-3$

4.
(1) x절편: $-\frac{4}{3}$, y절편: 4, 기울기: 3
(2) x절편: 12, y절편: 6, 기울기: $-\frac{1}{2}$

5.
$y=ax+3$, $y=-\frac{2}{3}x+b$가 서로 같으니
$a=-\frac{2}{3}$, $b=3$

6.
$y=\frac{2}{5}x-4$ 그래프를 그리면,
y절편이 -4이고, x절편이 10이므로
삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times10\times4=20$

7.
평행하면 기울기가 같다.

즉 기울기 : $\frac{k-3}{6+2}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ k=9$

8.

y절편이 3이므로 $b=3$

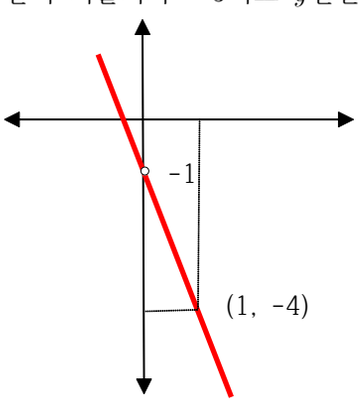
$y=ax+3$은 $(3,-1)$을 지나므로 $a=-\frac{4}{3}$

9.

일차방정식 $3x+y+1=0$을 y에 대하여 풀면

$y=-3x-1$

따라서 일차방정식 $3x+y+1=0$의 그래프는 그림과 같이 기울기가 -3이고 y절편이 -1인 직선이다.



10.

(1) $(-3,0)$과 $(3,-3)$을 지나는 직선이다.

(2) y축에 평행한 직선이다.

11.

두 일차방정식의 교점은 두 연립방정식의 해와 같다.

따라서, $-x=2x+3$

$-3x=3$, $\therefore\ x=-1, y=1$

12.

두 직선이 기울기가 1로 평행하므로 해가 없다.

13.

(1) (가)와 (나), (나)와 (다) 직선은 서로 기울기가 달라 한 점에서 만난다.

(2) 서로 만나지 않는다는 건 평행한 직선을 말한다. 즉 기울기가 같은 (가)와 (다) 직선이다.

14.

$y=ax-1$ 직선이 $(4,1)$, $(1,3)$을 지난다.

대입하여 a의 범위를 구하면,

$\frac{1}{2}\le a\le 4$

15.

$ax-by-c=0$

$by=ax-c$

$y=\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이 된다.

기울기: $\frac{a}{b}>0$, y절편: $-\frac{c}{b}>0$이므로

이 직선은 제 1,2,3사분면을 지난다.

16.

원점을 지나고 $(3,4)$를 지나는 직선이 직사각형을 이등분하는 직선이 된다.

$y=ax$ 이 $(3,4)$를 지나므로, 대입하면

$\therefore a=\frac{4}{3}$

따라서, $y=\frac{4}{3}x$

5-1 선분의 내분

스스로 확인하기 p.206~210

1. (1) 6 (2) 8

2. (1) 2, 5, $4\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{29}$

3. (1) -1 (2) 1

4. (1) $(2,-3)$ (2) $(1,-2)$

5. $(4,2)$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.211~218

1. -4 **1-1.** $a=\sqrt{2}$

2. $\mathrm{P}(\frac{21}{5},\ 0)$ **2-1.** $\mathrm{Q}(0,\ 6)$

3. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형

3-1. $\angle \mathrm{B}=90^\circ$인 직각이등변삼각형

4. ③ **4-1.** ⑤

5. $a=8$ **5-1.** $k=2$

6. $2\sqrt{2}$ **6-1.** $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$

7. 9 **7-1.** 8

8. $\mathrm{C}(-4,\ 9)$ **8-1.** $a=2,\quad b=6$

1.

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a+2)^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{2}$

양변을 제곱하면, $(a+2)^2+(-4)^2=32$

$a^2+4a+4+16=32$

$a^2+4a-12=0,\quad (a+6)(a-2)=0$

$a=-6$ 또는 $a=2$ 이므로 $(-6)+2=-4$ 이다.

1-1.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{(2-a)^2+(1-a-3)^2}=2\sqrt{3}$

양변을 제곱하면, $(2-a)^2+(-a-2)^2=12$

$(a^2-4a+4)+(a^2+4a+4)=12$

$2a^2=4,\ a^2=2$

따라서, $a>0$ 이므로 $a=\sqrt{2}$ 이다.

2.

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라고 하면,

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$\{(a-(-1)\}^2+(0-3)^2=(a-4)^2+(0-6)^2$

$a^2+2a+1+9=a^2-8a+16+36$

$10a=42,\quad \therefore a=\frac{21}{5}$

따라서, $\mathrm{P}(\frac{21}{5},\ 0)$ 이다.

2-1.

점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$이라고 하면,

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$(0-2)^2+(b-5)^2=(0-(-2))^2+(b-7)^2$

$4+b^2-10b+25=4+b^2-14b+49$

$b^2-10b+29=b^2-14b+53$

$4b=24,\quad \therefore b=6$

따라서, $\mathrm{Q}(0,\ 6)$ 이다.

3.

세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-2)^2+\{1-(-2)\}^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(6-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(6-2)^2+\{2-(-2)\}^2}=4\sqrt{2}$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이다.

3-1.

세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 구하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-0)^2+\{3-(-1)\}^2}=5$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(7-3)^2+(0-3)^2}=5$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(0-7)^2+\{(-1)-0\}^2}=5\sqrt{2}$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로

삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{B}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

4.

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times(-2)+1\times4}{2+1}\right)$

즉, $(4,\ 0)$ 이므로

$a=4,\ b=0$ 이다. 따라서, $a+b=4$ 이다.

4-1.

선분 AB를 1 : 3로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times5+3\times(-3)}{1+3},\ \frac{1\times(-2)+3\times6}{1+3}\right)$

즉, $(-1,\ 4)$ 이므로 $a=-1$ $b=4$ 이다.

따라서, $b-a=4-(-1)=5$ 이다.

5.

선분 AB를 5 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{5\times8+2\times1}{5+2},\ \frac{5\times4+2\times(-3)}{5+2}\right)$

즉, $(6,\ 2)$ 이므로

$(6,\ 2)$가 직선 $y=-x+a$ 위의 점이므로 대입하면,

$2=-6+a,\qquad a=8$

즉, $a=8$ 이다.

5-1.

선분 AB를 k : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\times(-4)+2\times2}{k+2},\ \frac{k\times1+2\times3}{k+2}\right)$

즉, $\left(\frac{-4k+4}{k+2},\ \frac{k+6}{k+2}\right)$ 이고,

이 점이 직선 $y=x+3$

위에 있으므로

$\frac{k+6}{k+2}=\frac{-4k+4}{k+2}+3,$

$k+6=-4k+4+3(k+2)$

$k+6=-4k+4+3k+6$

$2k=4,$ 즉, $k=2$ 이다.

6.

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-2)+2\times3}{3+2},\ \frac{3\times(-4)+2\times1}{3+2}\right)$

즉, $(0,\ -2)$

선분 BC를 2 : 3로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times8+3\times(-2)}{2+3},\ \frac{2\times6+3\times(-4)}{2+3}\right)$

즉, $(2,0)$ 이다.

따라서, 선분PQ의 길이는

$\sqrt{(2-0)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{2}$ 이다.

6-1.

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times5+2\times(-1)}{1+2},\ \frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}\right)$

즉, $(1,\ 2)$

선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-3)+1\times5}{3+1},\ \frac{3\times2+1\times(-2)}{3+1}\right)$

즉, $(-1,\ 1)$

따라서, 선분PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{(-1)+1}{2},\ \frac{2+1}{2}\right)$이므로 즉, $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ 이다.

7.

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

(i) $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+8}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$ 즉, $(4,\ 3)$

(ii) $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$ 으로

$\frac{6+a}{2}=4,\ \frac{-1+b}{2}=3$이 성립한다.

따라서, $a=2,\ b=7$ 이므로 $a+b=9$ 이다.

7-1.

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

(i) $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{6+b}{2}\right)$ 즉, $\left(3,\ \frac{6+b}{2}\right)$

(ii) $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+7}{2},\ \frac{3+(-5)}{2}\right)$ 으로 즉, $\left(\frac{a+7}{2},\ -1\right)$

$\frac{a+7}{2}=3,\ \frac{6+b}{2}=-1$이 성립한다.

따라서, $a=-1,\ b=-8$ 이므로 $ab=8$ 이다.

8.

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면,

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{6+1+x}{3},\ \frac{(-3)+9+y}{3}\right)$ 즉, $\left(\frac{7+x}{3},\ \frac{6+y}{3}\right)$

이때 무게중심의 좌표가 $(1,\ 5)$이므로

$\frac{7+x}{3}=1,\ \frac{6+y}{3}=5$ 이다.

따라서, $x=-4,\ y=9$이므로

점 C의 좌표는 $(-4,\ 9)$이다.

8-1.

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+(-1)+5}{3},\ \frac{(-4)+b+7}{3}\right)$

즉, $\left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+3}{3}\right)$

이때 무게중심의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$\frac{a+4}{3}=2,\ \frac{b+3}{3}=3$ 이다.

따라서, $a=2,\ b=6$이다.

5-2 두 직선의 평행과 수직

스스로 확인하기 p.219~222

1. ① - ㉠, ② - ㉢, ③ - ㉡

2. $y=-x+2$

3. ① - ㉡, ② - ㉠, ③ - ㉢

4. $y=\frac{5}{2}x+13$

5. $a=-1$

6. $a=1$

7. (1) $a=-1,\ b=5$ (2) $a=-1,\ b=-9$

8. (1) $a=-\frac{1}{2}$ (2) $a=3$ 또는 $a=-1$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.223~230

1. $y=2x+7$

1-1. $y=\frac{1}{4}x-3$

2. $y=-3x+11$

2-1. $y=\frac{1}{2}x+5$

3. $y=-2x+3$

3-1. $y=3x-4$

4. (1) $a=2$ (2) $a=-1$

4-1. (1) $a=-1$ (2) $a=\frac{1}{2}$

5. (1) $y=x-4$ (2) $y=-2x+11$

5-1. (1) $y=x+2$ (2) $y=-3x+6$

6. $y=x+2$

6-1. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

7. $a=1$

7-1. $a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=-1$

8. $k=-1$

8-1. $a=2$

1.

직선의 방정식 $6x-3y+1=0$을 변형하면

$y=2x+\frac{1}{3}$이므로 직선의 기울기는 2이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 2이고

점 $(-3,\ 1)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-1=2\{x-(-3)\}$, 즉 $y=2x+7$

1-1.

직선의 방정식 $x-4y+1=0$을 변형하면

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$이므로 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 $\frac{1}{4}$이고

점 $(4,\ -2)$를 지나므로 이 직선의 방정식은

$y+2=\frac{1}{4}(x-4)$,

즉 $y=\frac{1}{4}x-3$

2.

직선의 방정식 $3x-9y+4=0$을 변형하면

$y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$

이므로 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면

$\frac{1}{3}\times m=-1,\ m=-3$

따라서 구하는 직선은 기울기가 -3이고, 점 $(2,\ 5)$를 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-5=-3(x-2)$, 즉 $y=-3x+11$

2-1.

직선의 방정식 $2x+y-4=0$을 변형하면

$y=-2x+4$

이므로 직선의 기울기는 -2이다.

구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면

$(-2)\times m=-1,\ m=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 직선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고,

점 $(-4,\ 3)$를 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{2}(x-(-4))$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+5$

3.

두 점 $(-1,\ 1),\ (3,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-1}{3-(-1)}=\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-2(x-2)$

$\therefore\ y=-2x+3$

3-1.

두 점 $(-4,\ -1),\ (2,\ -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-(-1)}{2-(-4)}=-\frac{1}{3}$이므로 구하는 직선의 기울기는 3이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-(-1)=3(x-1)$

$\therefore\ y=3x-4$

4.

(1) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{1}{a-5}=\frac{a}{-6}\neq\frac{-1}{2}$

$\frac{1}{a-5}=\frac{a}{-6}$에서

$a^2-5a+6=0,\ (a-2)(a-3)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=3$

$\frac{a}{-6}\neq\frac{-1}{2}$에서 $a\neq 3$이므로 $a=2$

(2) 주어진 두 직선이 서로 수직이므로

$1\times(a-5)+a\times(-6)=0$ 이므로 $a=-1$

4-1.

(1) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{3}{a}=\frac{a-2}{1}\neq\frac{1}{1}$

$\frac{3}{a}=\frac{a-2}{1}$에서

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

$\frac{a-2}{1}\neq\frac{1}{1}$에서 $a\neq 3$이므로 $a=-1$

(2) 주어진 두 직선이 서로 수직이므로

$3\times a+(a-2)\times 1=0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

5.

(1) $y=x+4$와 평행하므로 직선의 기울기는 1이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 1이고

점 $(5,\ 1)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-1=x-5$,

즉 $y=x-4$

(2) 직선의 방정식 $2x+y-3=0$을 변형하면

$y=-2x+3$이므로 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 -2이고

점 $(5,\ 1)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-5)$, 즉 $y=-2x+11$

5-1.

(1) 직선의 방정식 $y=-x+3$의 직선의 기울기는 -1이고 구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면
$(-1)\times m=-1,\ m=1$
따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고,
점 $(1,\ 3)$를 지나므로 이 직선의 방정식은
$y-3=x-1,$
즉 $y=x+2$

(2) 직선의 방정식 $x-3y+5=0$을 변형하면
$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$
이므로 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.
구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면
$\frac{1}{3}\times m=-1,\qquad m=-3$
따라서 구하는 직선은 기울기가 -3이고,
점 $(1,\ 3)$를 지나므로 이 직선의 방정식은
$y-3=-3(x-1),$ 즉 $y=-3x+6$

6.

선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-1+2}{2},\ \frac{4+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 이고 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1-4}{2-(-1)}=-1$
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$를 지나고 기울기가 1인 직선이므로
$y-\frac{5}{2}=1\times\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$\therefore y=x+2$

6-1.

선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)=(3,1)$ 이고 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-(-1)}{4-2}=2$
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(3,1)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이므로
$y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

7.

두 직선이 평행하면 기울기는 같고,
y절편은 다르므로
$2a+1=a+2,\ -a+2\neq 2$ 이므로 $a=1$이다.

7-1.

두 직선이 수직이면 기울기의 곱이 -1이므로
$(2a+1)(a+2)=-1$
$2a^2+5a+3=0$
$(2a+3)(a+1)=0$
따라서 $a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=-1$

8.

두 직선이 평행하면 기울기는 같고,
y절편은 다르므로
$-2(k+1)=(k+1)^2,\ -k\neq 3$ 이므로
$-2k-2=k^2+2k+1$
$k^2+4k+3=0$
$(k+3)(k+1)=0$
따라서 $k=-3$ 또는 $k=-1$ 이나 $k\neq -3$이므로
$k=-1$이다.

8-1.

두 직선이 일치하므로
$\frac{1}{a}=\frac{a}{a+2}=\frac{a}{4}$이다.
$\frac{1}{a}=\frac{a}{a+2}$에서 $a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
또한 $\frac{1}{a}=\frac{a}{4}$ 에서 $a^2=4$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$
따라서 $a=2$이다.

5-3 점과 직선 사이의 거리

탐구하기 p.231~232

탐구1.

$-\frac{a}{b}$, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $-\frac{a}{b}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,

x_1+ak, y_1+bk, ax_2+by_2+c,

x_1+ak, y_1+bk,

$\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$

탐구2.

$-\frac{c}{b}$ $-\frac{c}{b}$

탐구3.

직선 $l: ax+by+c=0$에서 $x=-\frac{c}{a}$이므로,

$\overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$

이것은 ㉠에서 $b=0$을 대입한 것과 같으므로, ㉠이 성립한다.

스스로 확인하기 p.232~234

1. (1) $\frac{|5\times5-12\times1+13|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{26}{13}=2$

   (2) $\frac{|5\times3-12\times(-2)+13|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{52}{13}=4$

2. (1) $\frac{|5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$

   (2) $\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

3. (1) $x-y+1=0$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$을 잡으면,

   $\frac{|0-1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

   (2) $x+2y-3=0$ 위의 한 점 $(3,\ 0)$을 잡으면,

   $\frac{|3+0+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

4. 구하고자 하는 직선의 방정식을

   $x-3y+a=0$이라 하면,

   $\frac{|a|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{10}}=\sqrt{2}$이므로

   $|a|=2\sqrt{5}$

   $a=\pm2\sqrt{5}$

   그러므로,

   $x-3y+2\sqrt{5}=0$, $x-3y-2\sqrt{5}=0$

5. -1, 2, $3\sqrt{2}$, 1, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3}{2}$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.235~239

1. $a=33$ 또는 $a=3$ 1-1. $k=6$

2. $x+2y+5=0$ 또는 $x+2y-5=0$

2-1. $x+2y+10=0$ 또는 $x+2y-10=0$

3. 3 3-1. 10

4. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 4-1. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

5. 15 6. $y=2$

1.

$\frac{|3\times(-2)-4\times3+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|a-18|}{5}=3$이므로,

$|a-18|=15$

$\therefore a=33$ 또는 $a=3$

1-1.

$\frac{|k+4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ 이므로,

$|k+4|=10$

$\therefore k=6$ 또는 $k=-14$

$k>0$이므로, $k=6$

2.

구하고자 하는 직선의 방정식을 $x+2y+a=0$이라 하면,

$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$|a|=5$

$a=\pm 5$

$\therefore x+2y+5=0$ 또는 $x+2y-5=0$

2-1.

구하고자 하는 직선의 방정식을 $3x-4y+a=0$이라 하면,

$\frac{|a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|a|}{5}=2$

$|a|=10$

$a=\pm 10$

$\therefore 3x-4y+10=0$ 또는 $3x-4y-10=0$

3.

두 직선 $ax-2y+1=0$, $x+2y+b=0$이 평행하므로, $a=-1$

직선 $-x-2y+1=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x+2y+b=0$ 사이의 거리를 구하면,

$\frac{|1+b|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|1+b|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$|1+b|=5$

$1+b=\pm 5$

$b=4$ 또는 $b=-6$

$b>0$이므로, $b=4$

$a+b=-1+4=3$

3-1.

직선 $x-3y+a=0$ 위의 한 점 $(-a,\ 0)$과 직선 $x-3y+b=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-a+b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\therefore |a-b|=10$

4.

평행한 두 직선 l, m에 대하여, 직선 l 위의 한 점 P와 직선 m 위의 한 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은 두 직선 사이의 거리이다.

직선 $l: 2x+3y=6$ 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 직선 $m: 4x+6y=25$ 사이의 거리는

$\frac{|4\times 3-25|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{13}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

4-1.

평행한 두 직선 l, m에 대하여, 직선 l 위의 한 점 P와 직선 m에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는 두 직선 사이의 거리이다.

$l: 5x-4y-20=0$이고,

$m: 10x-8y=81$, $10x-8y-81=0$이므로

직선 $l: 5x-4y-20=0$ 위의 한 점 $(4,\ 0)$과 직선 $10x-8y-81=0$ 사이의 거리는

$\frac{|10\times 4-81|}{\sqrt{10^2+(-8)^2}}=\frac{41}{2\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

5.

두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2-1}{1-(-2)}(x-1)$

즉, $x-3y+5=0$이다.

점 C$(4,\ -7)$와 직선 $x-3y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-3\times(-7)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 3\sqrt{10}=15$

6.

두 직선의 교점의 좌표는 $(1,\ 2)$이고,

이 점을 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면

직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m+2=0$

점 $(1,\ 7)$과 이 직선 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{m^2+1}}$이므로 $m=0$일 때 최대가 된다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2$

6 도형의 방정식 (2)

6-0 중학교 개념으로 이해하기

스스로 확인하기 p.242~245

1. (1) 6 (2) 8 **2.** (1) 10 (2) $6\sqrt{3}$

3. (1) 5 (2) 15 **4.** (1) 75° (2) 20°

5. (1) 50° (2) 6 **6.** (1) 65° (2) 100°

7. (1) 한 원 위에 있지 않다.
(2) 한 원 위에 있다.

8. (1) $\angle x=115^o$ $\angle y=85^o$
(2) $\angle x=118^o$, $\angle y=62^o$

6-0 중학교 문제로 다지기

중학교 문제로 다지기 p.246~253

1. $10\sqrt{3}$ **2.** $4\sqrt{3}$

3. 6 **4.** 70°

5. 64° **6.** $\frac{15}{2}\pi$

7. $2\sqrt{10}$ **8.** 24

9. 240° **10.** 25°

11. 80^o **12.** 60°

13. $8\sqrt{2}$ **14.** 8

15. 48π **16.** 75°

1.

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

$\overline{BM}=\sqrt{10^2-5^5}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$\overline{AB}=2\overline{BM}=10\sqrt{3}$

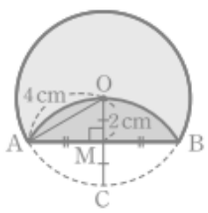
2.

$\overline{AB}\perp\overline{OC}$, $\overline{AM}=\overline{BM}$,

$\overline{OM}=\overline{MC}=2\text{cm}$ 이므로

$\overline{AM}=\sqrt{4^4-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{AB}=2\overline{AM}=4\sqrt{3}$



3.

$\overline{AM}=\sqrt{4^4-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{9}=3$

$\overline{AB}=2\overline{AM}=6$

$\overline{CD}=\overline{AB}=6$

4.

$\overline{OM}=\overline{ON}$ 이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형

$\angle ABC=\frac{1}{2}\times(180^o-40^o)=70^o$

5.

$\overline{PA}=\overline{PB}$ 이므로 이등변삼각형

$\angle x=\frac{1}{2}\times(180^o-52^o)=64^o$

6.

$\angle AOB=180^o-45^o=135^o$

부채꼴의 호의 길이$=2\pi\times 10\times\frac{135}{360}=\frac{15}{2}\pi$

7.

$\overline{CD}=\overline{CP}+\overline{PD}=\overline{AC}+\overline{BD}=5+8=13$

점 C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{HD}=3$이고 $\overline{CH}=\sqrt{13^2-3^5}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

$\overline{AB}=\overline{CH}=4\sqrt{10}$

원 O의 반지름은 $\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{10}$

8.

$\overline{AS}=\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{BQ}=4\text{cm}$

$\triangle DEC=\overline{DE}+\overline{EC}+\overline{CD}=(\overline{DR}+\overline{RE})+\overline{EC}+\overline{CD}$

$=(\overline{DS}+\overline{QE})+\overline{EC}+\overline{CD}=\overline{DS}+(\overline{QE}+\overline{EC})+\overline{CD}$

$=\overline{DS}+\overline{QC}+\overline{CD}$

$=(12-4)+(12-4)+8=24$

9.

$\angle y=360^o-2\angle BCD=360^o-200^o=160^o$

$\angle x=\frac{1}{2}\times 160^o=80^o$

$\angle x+\angle y=240^o$

10.

$\angle ACB=90^o$이고

$\angle CAB=\angle CDB=65^o$이므로

$\triangle ACB$에서 $\angle x=180^o-(65^o+90^o)=25^o$

11.

$\angle x=180^o\times\frac{4}{2+4+3}=180^o\times\frac{4}{9}=80^o$

12.

$\angle ABC=\angle x$라 하면

ABCD가 원에 내접하므로 $\angle FDC=\angle ABC=\angle x$

$\triangle EBC$에서 $\angle ECF=\angle EBC+\angle BEC=\angle x+26^o$

$\triangle DCF$에서 $\angle x+(\angle x+26^o)+34^o=180^o$

$2\angle x=120^o$ $\angle x=60^o$

13.

$\angle OAP=90^o$ 이므로 직각삼각형 APO에서

$\overline{PA}=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

$\overline{PB}=\overline{PA}=8\sqrt{2}$

14.

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{34})^2-6^2}=\sqrt{100}=10$

따라서 $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 이므로

$6+\overline{DC}=4+10$ $\overline{DC}=8$

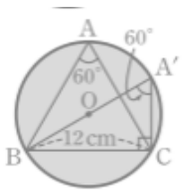
15.

원의 중심 O를 지나는 $\overline{A'B}$를 그으면

$\angle BCA' = 90^o$,

$\angle BA'C = \angle BAC = 60^o$

$\overline{A'B} = \dfrac{12}{\sin 60^o} = 12 \div \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$



원의 넓이는 $\pi \times (4\sqrt{3})^2 = 48\pi$

16.

$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = \angle BCA : \angle BAC : \angle ABC$

$\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = 180^o$ 이므로

$\angle BCA = 180^o \times \dfrac{5}{5+4+3} = 75^o$

$\angle BAT = \angle BCA = 75^o$

6-1 원의 방정식

스스로 확인하기 p.254~259

1. (1) 5

(2) $\sqrt{41}$

2. (1) $4\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{41}$

3. (1) $x^2 + y^2 = 1$

(2) $x^2 + y^2 = 25$

4. (1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

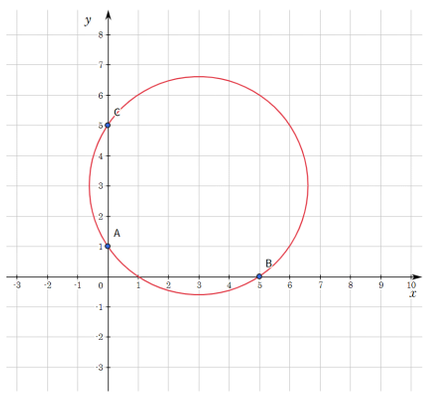
(2) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$

(3) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$

5. (1) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$

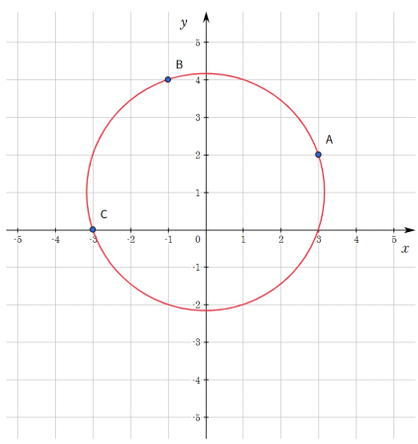
(2) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$

6. (1)



$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$

(2)



$x^2 + (y-1)^2 = 10$

7.

원의 중심의 좌표는 $(-2, -3)$이고

반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$ $(\sqrt{24})$

5.

(1) 원의 중심의 좌표를 구한다.

C(a, b)를 중심이라고 하면

$a = \dfrac{5+1}{2} = 3$, $b = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

→ C$(3, 1)$

반지름의 길이를 구한다.

$\overline{AC} = \sqrt{(3-5)^2 + \{1-(-1)\}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

방정식으로 나타낸다.

→ $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$

(2) 원의 중심의 좌표를 구한다.
C(a, b)를 중심이라고 하면
$a=\frac{1+7}{2}=4$, $b=\frac{1+5}{2}=3$
→ C(4, 3)
반지름의 길이를 구한다.
$\overline{AC}=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$
방정식으로 나타낸다.
→ $(x-4)^2+(y-3)^2=13$

6.
(1) 원의 중심의 좌표를 구한다.
P(a, b)를 중심이라고 하면
$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
1) $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로
$(a-0)^2+(b-1)^2=(a-5)^2+(b-0)^2$
→ $5a+b-12=0$ ……①
2) $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$ 이므로
$(a-5)^2+(b-0)^2=(a-0)^2+(b-5)^2$
→ $a-b=0$ ……②
①,②를 연립하여 풀면 $a=3, b=3$이므로
P(3, 3)
반지름의 길이를 구한다.
$\overline{PA}=\sqrt{(0-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$
방정식으로 나타낸다.
→ $(x-3)^2+(y-3)^2=13$
(2) 원의 중심의 좌표를 구한다.
P(a, b)를 중심이라고 하면
$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$
1) $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 이므로
$(a-3)^2+(b-2)^2=\{a-(-1)\}^2+(b-4)^2$
→ $2a-b+1=0$ ……①
2) $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$ 이므로
$\{a-(-1)\}^2+(b-4)^2=\{a-(-3)\}^2+(b-0)^2$
→ $a+2b-2=0$ ……②
①,②를 연립하여 풀면 $a=0, b=1$이므로
P(0, 1)
반지름의 길이를 구한다.
$\overline{PA}=\sqrt{(0-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$
방정식으로 나타낸다.
→ $x^2+(y-1)^2=10$

7.
$x^2+y^2+4x+6y-11=0$
$x^2+4x+y^2+6y-11=0$
$(x^2+4x+4)+(y^2+6y+9)-11-4-9=0$
$(x+2)^2+(y+3)^2=24$
원의 중심의 좌표는 $(-2,-3)$이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$ ($\sqrt{24}$)

대표유형 및 쌍둥이유형 p.260~263

1. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

1-1. $(x+2)^2+y^2=4$
원의 중심의 좌표는 $(-2,0)$이고
반지름의 길이는 2

2. $(x+3)^2+(y-3)^2=18$

2-1. $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

3. $(x-3)^2+(y+1)^2=13$

3-1. $(x-1)^2+(y+3)^2=25$

4. $k<20$ **4-1.** $2<a<3$

2.
$(x+3)^2+(y-3)^2=r^2$
$(0, 6)$을 대입하면
$(0+3)^2+(6-3)^2=18$
$(x+3)^2+(y-3)^2=18$

3.
원의 중심의 좌표를 구한다.
C(a, b)를 중심이라고 하면
$a=\frac{6+0}{2}=3$, $b=\frac{1+(-3)}{2}=-1$
→ C(3, −1)

반지름의 길이를 구한다.

$\overline{AC} = \sqrt{(3-6)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{13}$

방정식으로 나타낸다.

→ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$

4.

$x^2+y^2-4x-8y+k=0$

$x^2-4x+y^2-8y+k=0$

$(x^2-4x+4)+(y^2-8y+16)+k-4-16=0$

$(x-2)^2+(y-4)^2=-k+20$

$-k+20>0$

$-k>-20$

$k<20$

4-1.

$x^2+y^2+2ax+4ay+6a^2-5a+6=0$

$x^2+2ax+y^2+4ay+6a^2-5a+6=0$

$(x^2+2ax+a^2)+(y^2+4ay+4a^2)-5a^2+6a^2-5a+6=0$

$(x+a)^2+(y+2a)^2=-a^2+5a-6$

$-a^2+5a-6>0$

$a^2-5a+6<0$

$(a-2)(a-3)<0$

$2<a<3$

6-2 원과 직선의 위치관계

스스로 확인하기 p.264~266

1. 두 점에서 만난다.

2. $y=x\pm4$

3. $y=-2x\pm3\sqrt{5}$

4. $x+2y=5$

5. $x=\sqrt{5}$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.267~276

1. 두 점에서 만난다.

1-1. 두 점에서 만난다.

2. $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

2-1. $\therefore k>3\sqrt{5}$ or $k<-3\sqrt{5}$

3. $k=\pm2\sqrt{2}$

3-1. $k=\pm2$

4. $k=\pm\sqrt{5}$

4-1. $k=\pm\sqrt{3}$

5. $y=x\pm\sqrt{10}$

5-1. $y=x\pm3\sqrt{2}$

6. $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+3$

6-1. $y=x+2\sqrt{3}$

7. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x+3$

7-1. $y=\pm\sqrt{3}x+4$

8. $y=\pm\sqrt{3}x+2$

8-1. $y=\pm2\sqrt{6}x+5$

9. $-2-3\sqrt{2}<k<-2+3\sqrt{2}$

9-1. $-1-3\sqrt{2}<k<-1+3\sqrt{2}$

10. $k>2$ or $k<-2$

10-1. $k>2\sqrt{2}+2$ or $k<-2\sqrt{2}+2$

1.

원 $x^2+y^2+2x=10$와 직선 $y=x+1$ 에서

$x^2+(x+1)^2+2x=10$

$(x+1)^2+(x+1)^2=11$

$2(x+1)^2=11$

$x+1=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$ $\therefore x=-1\pm\frac{\sqrt{22}}{2}$

두 점에서 만난다.

1-1.

$x^2-5x+5=0$

$D=25-4\times5>0$ 이므로, 두점에서 만난다.

2.

$x^2+(2x+k)^2=9$

$D=(4k)^2-4\times5\times(k^2-9)>0$

$k^2<45$

$\therefore\ -3\sqrt{5}<k<-3\sqrt{5}$

2-1.

$D<0$이므로

$k^2>45$

$\therefore k>3\sqrt{5}$ or $k<3\sqrt{5}$

3.

$x^2+(x+k)^2=4$

$D/4=k^2-2\times(k^2-4)=0$

$\therefore\ k=\pm2\sqrt{2}$

3-1.

$x^2+(-x+k)^2=2$

$D/4=k^2-2\times(k^2-2)=0$

$\therefore\ k=\pm2$

4.

$x^2+(2x+k)^2=1$

$5x^2+4kx+k^2-1=0$

$D/4=4k^2-5\times(k^2-1)=0$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{5}$

4-1.

$2x^2+(2x-k)^2=1$

$6x^2-4kx+k^2-1=0$

$D/4=4k^2-6\times(k^2-1)=0$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{3}$

5.

원 $x^2+y^2=5$에 접하고

기울기가 1인 직선: $y=x+k$ 대입하면

$x^2+(x+k)^2=5$ 전개하여

접한다면 판별식 $D=0$이므로,

$D=k^2-2\times(k^2-5)=0$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{10}$

따라서, $y=x\pm\sqrt{10}$

5-1.

원 $x^2+y^2=9$에 접하고

기울기가 1인 직선: $y=x+k$ 대입하면

$x^2+(x+k)^2=9$ 전개하여

접한다면 판별식 $D=0$이므로,

$D=k^2-2\times(k^2-9)=0$

$\therefore\ k=\pm3\sqrt{2}$

따라서, $y=x\pm3\sqrt{2}$

6.

원 $x^2+y^2=6$에 대하여 점 $(\sqrt{2},\ 2)$에서의

접선의 방정식은

$\sqrt{2}x+2y=6$

따라서, $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+3$

6-1.

원 $x^2+y^2=6$에 대하여

점 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$-\sqrt{3}x+\sqrt{3}y=6$

따라서, $y=x+2\sqrt{3}$

7.

점 $(0,3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은

접선의 방정식 접점을 $(x_1,\ y_1)$이면

$x_1x+y_1y=4$ 이다. 이 식에 $(0,3)$대입하면

$3y_1=4\quad\therefore y_1=\dfrac{4}{3},\ \therefore x_1=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

따라서, 접선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+3$

7-1.

점 $(0,4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의

방정식 접점을 $(x_1,\ y_1)$이면 $x_1x+y_1y=4$ 이다.

이 식에 $(0,4)$ 대입하면

$4y_1=4\quad\therefore y_1=1,\ \therefore x_1=\pm\sqrt{3}$

따라서, 접선의 방정식은
$y=\pm\sqrt{3}x+4$

8.

점 $(0,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은
접선의 방정식은 $y=mx+2$ 이다.
위 식을 원에 대입하면
$x^2+(mx+2)^2=1$
접한다면, 판별식 $D=0$이므로,
$D/4=4m^2-3(m^2+1)=0$
$\therefore\ m=\pm\sqrt{3}$
따라서, $y=\pm\sqrt{3}x+2$

8-1.

점 $(0,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은
접선의 방정식은 $y=mx+5$ 이다.
위 식을 원에 대입하면
$x^2+(mx+5)^2=1$
접한다면, 판별식 $D=0$이므로,
$D/4=25m^2-24(m^2+1)=0$
$\therefore\ m=\pm 2\sqrt{6}$
따라서, $y=\pm 2\sqrt{6}x+5$

9.

$(x-2)^2+(x+k)^2=9$
$2x^2+(2k-4)x+k^2-5=0$
두 점에서 만난다면, 판별식 $D>0$이다.
$D/4=(k-2)^2-2\times(k^2-5)>0$
$k^2+4k-14<0$
$(k+2)^2<18$
$\therefore\ -2-3\sqrt{2}<k<-2+3\sqrt{2}$

9-1.

$(x+1)^2+(x-k)^2=9$
$2x^2+(2-2k)x+k^2-8=0$
두 점에서 만난다면, 판별식 $D>0$이다.
$D/4=(k-1)^2-2(k^2-8)>0$
$k^2+4k-14<0$
$(k+2)^2<18$
$\therefore\ -2-3\sqrt{2}<k<-2+3\sqrt{2}$

10.

$(x+2)^2+(2x+k)^2=4$
$5x^2+(4+4k)x+k^2=0$
만나지 않으면, 판별식 $D<0$이다.
$D/4=4(k+1)^2-5k^2<0$
$k^2>4$
$\therefore\ k>2$ or $k<-2$

10-1.

$(x-2)^2+(x-k)^2=4$
$2x^2-(4+2k)x+k^2=0$
만나지 않으면, 판별식 $D<0$이다.
$D/4=(2+k)^2-2k^2<0$
$(k-2)^2>8$
$\therefore\ k>2\sqrt{2}+2$ or $k<-2\sqrt{2}+2$

6-3 평행이동

스스로 확인하기 p.277~279

1. (1) $(3,\ 4)$
(2) $(a,\ b)$

2. (1) $2,\ -1$ (2) $-3,\ 5$

3. (1) $y=3x-5$, $(3,\ 4)$,
도형의 방정식에 좌표를 대입하면
$4=3\times 3-5$이므로 도형 위에 있다.
(2) $y=-2(x-5)^2+12$, $(3,\ 4)$,
도형의 방정식에 좌표를 대입하면
$4=-2(3-5)^2+12$이므로 도형 위에 있다.
(3) $(x-6)^2+(y-8)^2=25$, $(3,\ 4)$,
도형의 방정식에 좌표를 대입하면
$(3-6)^2+(4-8)^2=25$이므로 도형 위에 있다.

대표유형 및 쌍둥이유형 p.280~285

1. (1) $(6, -5)$ (2) $(-4, 5)$

1-1. (1) $(6, -4)$ (2) $(-3, 2)$

2. $a=5, b=4$

2-1. $a=-1, b=0$

3. $3x-4y-12=0$

3-1. $y=3x-11$

4. $y=2x^2+8x+9$

4-1. $y=x^2-4x-5$

5. 6

5-1. 10

6. $y=x^2+10x+20$

6-1. $y=2x^2+19x+43$

1.

(1) 점의 이동은 $P'(x+a,\ y+b)$로 좌표를 구하므로
$x'=4+2=6,\ y'=-2-3=-5$이다.
따라서 평행이동한 점의 좌표는 $(6, -5)$이다.
(2) 마찬가지 방법으로 구하면
$x'=-6+2=-4,\ y'=8-3=5$이므로
평행이동한 점의 좌표는 $(-4, 5)$이다.

1-1.

(1) $x'=5+1=6,\ y'=-2-2=-4$이므로
평행이동한 점의 좌표는 $(6, -4)$이다.
(2) $x'=-4+1=-3,\ y'=4-2=2$이므로
평행이동한 점의 좌표는 $(-3, 2)$이다.

2.

$P(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $P'(x', y')$이라고 할 때,
$x'=x+a,\ y'=y+b$이 성립하므로 각 좌표를 대입하면 $2=a-3,\ b=2+2=4$이다.
(단, 이 때의 a, b는 문제에서 주어진 상수이다.)
따라서 $a=5, b=4$이다.

2-1.

각 좌표를 $x'=x+a,\ y'=y+b$에 대입하면
$2=a+3,\ b=2-2=0$이다.
(단, 이 때의 a, b는 문제에서 주어진 상수이다.)
따라서 $a=-1, b=0$이다.

3.

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이므로 이를 이용하면
$3(x-3)-4(y+2)+5=0$이고 이를 정리하면
$3x-4y-12=0$이다.

3-1.

위와 같은 방법으로
$y+3=3(x-2)-2$이고 이를 정리하면
$y=3x-11$이다.

4.

(방법1)
주어진 포물선 식에 직접 대입하면
$y+2=2(x+3)^2-4(x+3)+5$ 이고
이를 정리하면
$y=2x^2+8x+9$이다.
(방법2)
주어진 식을 완전제곱식을 이용하여 나타내면
$y=2(x-1)^2+3$이고 이 도형을 평행이동하면
$y+2=2(x-1+3)^2+3$이 되고 이를 정리하면
$y=2(x+2)^2+1$이다.
이를 다시 전개하면 $y=2x^2+8x+9$이다.

4-1.

(방법1)
주어진 포물선 식에 직접 대입하면
$y+3=(x-4)^2+4(x-4)-2$ 이고 이를 정리하면
$y=x^2-4x-5$이다.
(방법2)
주어진 식을 완전제곱식을 이용하여 나타내면
$y=(x+2)^2-6$이고 이 도형을 평행이동하면
$y+3=2(x+2-4)^2-6$이 되고 이를 정리하면
$y=(x-2)^2-9$이다.
이를 다시 전개하면 $y=x^2-4x-5$이다.

5.
원의 방정식을 완전제곱식을 이용하여 나타내면
$(x-2)^2+(y-3)^2=8$이고 이를 평행이동한 식은
$(x-2-a)^2+(y-3-b)^2=8$인데 이 식이
$(x-5)^2+(y+2)^2=c$이 되므로 각 상수를 비교하면
$a=3,\ b=-5,\ c=8$이다.
따라서 $a+b+c=3-5+8=6$이다.

5-1.
원의 방정식을 완전제곱식을 이용하여 나타내면
$(x+2)^2+(y-4)^2=9$이고 이를 평행이동한 식은
$(x+2-a)^2+(y-4-b)^2=9$인데 이 식이
$(x-5)^2+(y+2)^2=c$이 되므로 각 상수를 비교하면
$a=7,\ b=-6,\ c=9$이다.
따라서 $a+b+c=7-6+9=10$이다.

6.
점$(2,\ 3)$이 $(-1,\ 5)$로 평행이동 되었다면
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼
평행이동된 것이다. 따라서 이 평행이동에 의한
도형의 방정식은
$y-2=(x+3)^2+4(x+3)-3$이고 이를 정리하면
$y=x^2+10x+20$이다.

6-1.
점$(4,\ 0)$이 $(-1,\ 3)$으로 평행이동 되었다면 x축의
방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이
동된 것이다. 따라서 이 평행이동에 의한 도형의
방정식은
$y-3=2(x+5)^2-(x+5)-5$이고 이를 정리하면
$y=2x^2+19x+43$이다.

6-4 대칭이동

스스로 확인하기 p.286~289

1. (1) $(1,\ -3)$
(2) $(-1,\ 3)$
(3) $(-1,\ -3)$
(4) $(3,\ 1)$

2. (1) $(1,\ -2)$ (2) $(-4,\ 3)$

3. (1)

x축	$x+2y+1=0$
y축	$x+2y-1=0$
원점	$x-2y-1=0$
직선 $y=x$	$2x-y-1=0$

(2)

x축	$(x+1)^2+(y+2)^2=4$
y축	$(x-1)^2+(y-2)^2=4$
원점	$(x-1)^2+(y+2)^2=4$
직선 $y=x$	$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

대표유형 및 쌍둥이유형 p.290~293

1. $a=-2$ **1-1.** $a=-\frac{1}{2}$

2. $a=-1$ **2-1.** $k=3$

3. $\sqrt{41}$ **3-1.** 4

4. $a=-\frac{1}{3}$ **4-1.** $a=2$

1.
점 $(2a-1,\ a)$를 직선 $y=x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(a,\ 2a-1)$이다.
이 점이 직선 $y=3x+1$ 위에 있으므로
$2a-1=3a+1$
이다. 따라서 $a=-2$이다.

1-1.
점 $(2a,\ 4a+1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점은
$(-2a,\ -4a-1)$이다. 이 점이 이차함수 $y=x^2$
그래프 위에 있으므로
$-4a-1=(-2a)^2,\quad 4a^2=-4a-1$

이다. 따라서 $4a^2+4a+1=0$이므로

$(2a+1)^2=0$

이다. 그러므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.

2.

직선 $y=ax-3$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $x=ay-3$이다.
즉, 두 직선

$ax-y-3=0,\ x-ay+3=0$

이 일치하므로

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{-a}=\frac{-3}{3}$

이다. 따라서 $a=-1$이다.

2-1.

중심의 좌표가 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=k^2$이다.
이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(x+1)^2+(y+1)^2=k^2$

이다. 이 원이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

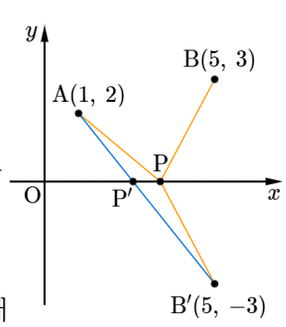
$9=k^2$

이다. 따라서 $k=\pm 3$이므로 양수 k의 값은 3이다.

3.

그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B′에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최솟값과 같다.
한편 $\overline{AP}+\overline{B'P}$는 점 P가 $\overline{AB'}$와 x축의 교점인 P′일 때 최소이다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{(1-5)^2+(2+3)^2}=\sqrt{41}$ 이다.

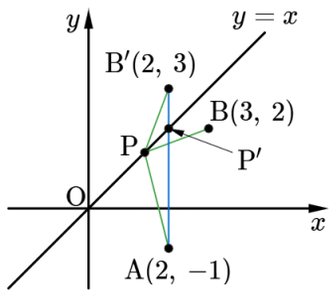


3-1.

그림과 같이 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B′에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최솟값과 같다. 한편 $\overline{AP}+\overline{B'P}$는 점 P가 $\overline{AB'}$와 직선 $y=x$의 교점인 P′일 때 최소이다. 따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

$\overline{AB'}=3-(-1)=4$

이다.



4.

직선 $x-3y+1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-x-3y+1=0$이다.
이 직선이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심인 $(2,\ a)$를 지난다.

따라서 $-2-3a+1=0$이므로 $a=-\frac{1}{3}$이다.

4-1.

직선 $2x+3y-2=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $2y+3x-2=0$이다.
이 직선이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심인 $(a,\ -2)$를 지난다.
따라서 $-4+3a-2=0$이므로 $a=2$이다.

발간을 도와주신 분

기획

한 종 환 부산광역시교육청창의융합교육원장
노 영 희 부산광역시교육청창의융합교육원 기획운영부장
송 본 욱 부산광역시교육청창의융합교육원 연구사
이 주 영 부산광역시교육청창의융합교육원 연구사

집필

박 주 연 덕원중학교 교사
(수수교(수학 수업을 연구하는 교사) 수학교육 연구회 회장)
오데레사 영남중학교 교감
심 민 혜 분포중학교 수석교사
이 경 아 온천중학교 수석교사
김 문 선 대천중학교 수석교사
이 준 수 덕원중학교 교사
정 선 화 신덕중학교 교사
김 수 경 정관중학교 교사
유 경 미 지사중학교 교사
하 유 림 신덕중학교 교사
류 성 희 학장중학교 교사
김 민 혜 덕천중학교 교사
최 성 우 동신중학교 교사
구 교 희 주례중학교 교사
백 순 필 여명중학교 교사
조 인 원 부산중앙여자중학교 교사

검토

이 혜 정 연천중학교 교사
이 현 주 연천중학교 교사
권 종 오 부산과학고등학교 교사

2024 수학과 징검다리

발행처 부산광역시교육청창의융합교육원
발행일 2024년 11월

디자인·인쇄 (주)프린테크 T)301-3113